# HEMUPPGIFT 5

DANIEL BOSK

*SF2727 Matematiskt forum för Lärare, Kungliga Tekniska Högskolan*

**Fråga 1.** *Låt $(X, \mathcal{U})$ vara ett topologiskt rum.*

(1) *Vi säger att $X$ är $T_0$ om det för varje par av punkter $x, y \in X$ finns en öppen mängd som innehåller den ena punkten men inte den andra. D.v.s.*

$$\forall\, x, y \in X\ \exists\, U \in \mathcal{U} : x \in U \wedge y \notin U.$$

(2) *Vi säger att $X$ är $T_1$ om det för varje par av punkter $x, y \in X$ finns en öppen mängd som innehåller $x$ men inte $y$ och en öppen mängd som innehåller $y$ men inte $x$. D.v.s.*

$$\forall\, x, y \in X\ \exists\, U, V \in \mathcal{U} : x \in U \wedge y \notin U, y \in V \wedge x \notin V.$$

(3) *Vi säger att $X$ är $T_2$, eller* Hausdorff*, om det för varje par av punkter $x, y \in X$ finns* disjunkta *öppna mängder $U$ och $V$ sådana att $x \in U$ och $y \in V$. D.v.s.*

$$\forall\, x, y \in X\ \exists\, U, V \in \mathcal{U}, U \cap V = \emptyset : x \in U \wedge y \in V.$$

*Ge exempel på*

(1) *ett topologiskt rum som är $T_0$ men inte $T_1$ eller $T_2$,*
(2) *ett topologiskt rum som är $T_1$ men inte $T_2$.*

$(X, \mathcal{U})$, där $X = \{x, y\}$ och $\mathcal{U} = \{\emptyset, \{x\}, \{x, y\}\}$, är ett topologiskt rum som är $T_0$ men inte $T_1$ eller $T_2$. $(Y, \mathcal{V})$, där $Y = \mathbb{Z}$ och $\mathcal{V}$ innehåller tomma mängden, $Y$ självt och alla öppna mängder $O_Z = Y \setminus Z$ som innehåller hela $Y$ utom en delmängd $Z \subset Y$, är ett topologiskt rum som är $T_1$ men inte $T_2$.

*Bevis.* $(X, \mathcal{U})$ är $T_0$ eftersom att det för alla par $x, y \in X$ finns en öppen delmängd $U \in \mathcal{U}$ till $X$ sådan att $x \in U$ och $y \notin U$, mer specifikt är $U = \{x\}$. Topologin är däremot inte $T_1$ eller $T_2$ eftersom att det inte finns ytterligare en öppen delmängd $U' \neq U$ sådan att $x \notin U'$ och $y \in U'$. Denna mängd skulle måsta vara $U' = \{y\} \notin \mathcal{U}$ som inte är öppen i $X$. (Om den varit öppen hade topologin varit $T_2$, eller *Hausdorff*.)

$(Y, \mathcal{V})$ är $T_1$ eftersom att det för alla par $x, y \in Y$ finns en öppen delmängd $O_{\{x\}} \in \mathcal{V}$ sådan att $x \notin O_{\{x\}}$ och $y \in O_{\{x\}}$ samt en öppen delmängd $O_{\{y\}} \in \mathcal{V}$ sådan att $y \notin O_{\{y\}}$ och $x \in O_{\{y\}}$. Enligt definitionen måste $O_A \cap O_B \neq \emptyset$ för alla delmängder $A, B \subset Y$ och $(Y, \mathcal{V})$ kan därför inte vara $T_2$. □

**Fråga 2.** *Låt $(X, \mathcal{U})$ och $(Y, \mathcal{V})$ båda ha den* ändliga komplement-*topologin. Har produkten $(X \times Y, \mathcal{U} \times \mathcal{V})$ den ändliga komplement-topologin?*

$(X \times Y, \mathcal{U} \times \mathcal{V})$ kommer också att ha den ändliga komplement-topologin.

---

*Date*: May 25, 2010.

*Bevis.* För att produkttopologin skall ha den ändliga komplement-topologin måste det gälla för alla $(U, V) \in \mathcal{U} \times \mathcal{V}$ att

$$\begin{aligned}(U, V)^{\complement} &= (U^{\complement}, V^{\complement}) &(1)\\ &= (X \setminus U, Y \setminus V) &(2)\end{aligned}$$

är ändlig. Att denna är ändlig följer av att alla $U \in \mathcal{U}$ har ändligt komplement och att alla $V \in \mathcal{V}$ har ändligt komplementr, d.v.s. alla möjliga komponenter $(U, V) \in \mathcal{U} \times \mathcal{V}$ måste ha ändligt komplement. Alltså har produkten $(X \times Y, \mathcal{U} \times \mathcal{V})$ också den ändliga komplement-topologin. □

**Fråga 3.** *Låt $(X, \mathcal{U})$ vara ett topologiskt rum och låt $f : X \to Y$ vara en avbildning från $X$ till $Y$. Vidare, låt $\mathcal{V}$ bestå av alla delmängder $V \subseteq Y$ sådana att $f^{-1}(V)$ är öppen i $X$. Visa att $\mathcal{V}$ ger en topologi på $Y$ och att $f$ är en kontinuerlig avbildning från $(X, \mathcal{U})$ till $(Y, \mathcal{V})$.*

*Bevis.* Vi vill först visa att $\mathcal{V}$ ger en topologi på $Y$. Om $\{U_i\}_{i \in I} \in \mathcal{V}$, för någon indexmängd $I$, då måste $f^{-1}(U_i) \in \mathcal{U}$, för alla $i \in I$. Vi har således att

$$\cup_{i \in I} f^{-1}(U_i) = f^{-1}(\cup_{i \in I} U_i) \in \mathcal{U} \implies \cup_{i \in I} U \in \mathcal{V}.$$

På samma sätt har vi att

$$\begin{aligned}f^{-1}(U_{i_1}) \cap f^{-1}(U_{i_2}) \cap \dots f^{-1}(U_{i_n}) &= f^{-1}(U_{i_1} \cap U_{i_2} \cap \dots \cap U_{i_n}) \in \mathcal{U}\\ &\implies U_{i_1} \cap U_{i_2} \cap \dots \cap U_{i_n} \in \mathcal{V},\end{aligned}$$

för ett ändligt antal $U_{i_j} \in \mathcal{V}$. Vi har också att $f^{-1}(\emptyset) = \emptyset \in \mathcal{U}$ samt $f^{-1}(Y) = X \in \mathcal{U}$ och alltså är $\emptyset \in \mathcal{V}$ och $Y \in \mathcal{V}$. $(Y, \mathcal{V})$ är således ett topologiskt rum.

Slutligen, eftersom att $f^{-1}(V) \in \mathcal{U}$ för alla $V \in \mathcal{V}$, enligt definition, är $f$ en kontinuerlig avbildning från $(X, \mathcal{U})$ till $(Y, \mathcal{V})$. □

**Fråga 4.** *Vilka av de topologiska rummen $(X, \mathcal{U}_i)$, där $X = \{x, y\}$ har två element, är homeomorfa?*

De topologier på $X$ som är homeomorfa är $\mathcal{U}_1 = \{\emptyset, \{x\}, \{x, y\} = X\}$ och $\mathcal{U}_2 = \{\emptyset, \{y\}, \{x, y\} = X\}$. (Alla topologier är självklart homeomorfa med sig själva.)

*Bevis.* För att kunna bilda en bijektion $f$ mellan $\mathcal{U}_i$ och $\mathcal{U}_j$ krävs först att de är av samma kardinalitet. Dessutom krävs att alla element $V \in \mathcal{U}_i$ och $f(V) \in \mathcal{U}_j$ har samma kardinalitet, d.v.s. $\operatorname{card} V = \operatorname{card} f(V)$. De enda samlingar av öppna delmängder som har samma kardinalitet är $\mathcal{U}_1$ och $\mathcal{U}_2$ givna ovan. Avbildningen

$$f(a) = \left\{ \begin{array}{ll} y & \text{om } a = x \\ x & \text{om } a = y \end{array} \right\} = f^{-1}(a),$$

ger en homeomorfi mellan $\mathcal{U}_1$ och $\mathcal{U}_2$.

Det finns en avbildning från $\mathcal{U}_d = \{\emptyset, \{x\}, \{y\}, \{x, y\} = X\}$ till $\mathcal{U}_t = \{\emptyset, \{x, y\} = X\}$, men inte omvänt. På samma sätt finns det ingen bijektion mellan $\mathcal{U}_t$ och $\mathcal{U}_1$ eller $\mathcal{U}_2$, p.g.a. $\{x\} \in \mathcal{U}_1$ och $\{y\} \in \mathcal{U}_2$. I fallet $\mathcal{U}_d$ och $\mathcal{U}_1$ eller $\mathcal{U}_2$ gäller att både $\{x\}, \{y\} \in \mathcal{U}_d$ måste avbildas på $\{x\} \in \mathcal{U}_1$ eller $\{y\} \in \mathcal{U}_2$. Alltså är det bara $\mathcal{U}_1$ och $\mathcal{U}_2$ som är homeomorfa (med andra än sig själva). □

(Daniel Bosk) Klubbvägen 3 12tr, 18257 Danderyd
*E-mail address*: dbosk@kth.se