En formalisering av matematiken i svensk gymnasieundervisning

A Formalisation of Swedish Upper Secondary School Mathematics

DANIEL BOSK

Examensarbete vid programmet *Civilingenjör och lärare*
inom området Teknik och lärande

Stockholm 2011

Abstract

This study examines how formal mathematics can be taught in the Swedish secondary school with its new curriculum for mathematics. The study examines what a teaching material in formal mathematics corresponding to the initial content of the course Mathematics 1c could look like, and whether formal mathematics can be taught to high school students.

The survey was conducted with second year students from the science programme. The majority of these students studied the course Mathematics D. The students described themselves as not being motivated towards mathematics.

The results show that the content of the curriculum can be presented with formal mathematics. This both in terms of requirements for content and students being able to comprehend this content. The curriculum also requires that this type of mathematics is introduced in the course Mathematics 1c.

The results also show that students are open towards and want more formal mathematics in their ordinary education. They initially felt it was strange because they had never encountered this type of mathematics before, but some students found the formal mathematics to be easier than the mathematics ordinarily presented in class.

The study finds no reason to postpone the meeting with the formal mathematics to university level. Students' commitment to proof and their comprehention of content suggests that formal mathematics can be introduced in high school courses. This study thus concludes that the new secondary school course Mathematics 1c can be formalised and therefore makes possible a renewed mathematics education.

Sammanfattning

Denna studie undersöker hur formell matematik kan undervisas i den nya svenska gymnasieskolan med dess nya ämnesplan för matematik. I studien undersöks hur ett undervisningsmaterial i formell matematik motsvarande det inledande innehållet i kursen Matematik 1c kan se ut och huruvida denna matematik kan undervisas med gymnasieelever.

Undersökningen genomfördes med elever från det naturvetenskapliga programmets andra årskurs. Majoriteten av dessa elever läste då kursen Matematik D. Eleverna beskrev sig själva som ej motiverade i matematik.

Resultatet visar att innehållet i ämnesplanen kan presenteras med formell matematik. Detta både med avseende ämnesplanens krav på innehåll och att eleverna kan förstå innehållet. Ämnesplanen kräver dessutom att denna typ av matematik tas upp som en del av innehållet i kursen Matematik 1c.

Resultatet visar också att eleverna är öppna för och vill ha mer formell matematik i undervisningen. De tyckte att det kändes ovant eftersom att de aldrig tidigare stött på denna typ av matematik, men vissa elever fann formell matematik som enklare än matematiken som normalt presenteras på lektionerna.

Studien finner ingen anledning till att skjuta upp mötet med formell matematik till universitetsnivå. Elevernas engagemang för bevis och tillgodogörandet av innehållet talar också för att formell matematik kan introduceras i gymnasiekurserna. Studiens slutsats är således att nya gymnasieskolans kurs Matematik 1c kan formaliseras och öppna upp för en förnyad matematikundervisning.

Handledare Roy Skjelnes, Institutionen för matematik, Kungliga Tekniska Högskolan.

Biträdande handledare Lil Engström, Institutionen för matematikämnets och naturvetenskapsämnenas didaktik (MND), Stockholms universitet.

Examinator Hans Thunberg, Institutionen för matematik, Kungliga Tekniska Högskolan.

Innehåll

Förord ix

1 Inledning 1
1.1 Syfte och frågeställning . . . 4

2 Tidigare forskning 5
2.1 Matematikundervisningen i svensk gymnasieskola . . . 5
2.2 Skillnaderna mellan gymnasieskola och högskola . . . 8
2.3 Lärande i matematik . . . 10

3 Metod 15
3.1 Urval . . . 16
3.2 Genomförande . . . 16
3.3 Etiska synpunkter . . . 17

4 Resultat och resultatanalys 19
4.1 Kompendiets utformning . . . 19
4.2 Elevernas upplevelse av undervisningen . . . 22
4.3 Egna observationer . . . 24
4.4 Intervjuer . . . 26

5 Diskussion 31
5.1 Slutsats . . . 33
5.2 Förslag till vidare forskning . . . 33

Referenser 35

A Dokument 39
A.1 E-brev till rektorer . . . 39
A.2 Elevers deltagande . . . 43
A.3 Enkät . . . 48

B Kompendium 53

Förord

Inspirationen till denna studie har varit min kärlek för matematik och dess underbara generaliserbarhet samt min pedagogiska övertygelse att alla kan lära sig matematik. Min egen erfarenhet från svensk skola och mina universitetsstudier i matematik säger mig att matematiken som den undervisas i grundskola och gymnasieskola är långt från matematiken som den undervisas på universiteten vidare också från den som forskas på. Jag har haft tankar om att den generaliserade matematiken med bevis och härledningar, som den först är på universitetsnivå, ger mer förståelse till eleverna än dagens undervisning i räkning med den evinnerliga repetitionen genom räknande av tal efter tal. Jag har mött många som sett matematiken som en kombination av memorering av hur siffror ska kombineras i olika situationer och i annat fall gissande av hur de ska kombineras. Detta är ej undervisning då matematikenlektionerna idag är utformade för att eleverna utifrån ett fåtal givna exempel ska försöka att generalisera kunskaper som de sedan ska anpassa efter ett större antal testuppgifter. Jag har också, inom det datalogiska området maskininlärning, sett algoritmer som arbetar på samma sätt. Är det då möjligt att säga att våra svenska matematikelever uppnår en högre förståelse för innehållet än dessa datorprogram?

Projektet har tagit både tid och kraft men har varit otroligt roligt och givande. Jag vill tacka mina handledare Roy Skjelnes och Lil Engström för givande diskussioner kring arbetet och bra återkoppling. Jag vill också tacka Dan Laksov som även han deltagit och bidragit med värdefulla insikter. Slutligen vill jag tacka den skola, den lärare och de elever som tagit sig tiden att delta i undersökningen.

Söråker, juni 2011
Daniel Bosk

Kapitel 1

Inledning

Dagens matematikundervisning har fått mycket kritik, bland annat från Skolinspektionen (2010). Matematiken i grundskole- och gymnasieundervisningen upplevs som räknecentrerad och eleverna lär sig genom memorering snarare än förståelse (Skolinspektionen, 2010; Johansson, 2006). Skolinspektionens kvalitetsgranskningsrapport (Skolinspektionen, 2010) om matematikundervisningen i gymnasieskolan visar också att matematikkunskaperna hos svenska elever med åren blivit sämre, rapporten hänvisar till bland annat resultaten i *TIMSS Advanced 2008* (Skolverket, 2009). Detta märks också på högskolan. Thunberg, Filipsson, och Cronhjort (2006) skriver att gapet mellan gymnasiematematiken och högskolematematiken blivit större och att studenterna inte har de förkunskaper som högskolan förväntar sig när de fortsätter att studera.

Hur skiljer sig då grundskole- och gymnasiematematiken från den på universiteten och högskolorna? Agahi (2010) har undersökt hur ett gymnasie- och ett högskoleläromedel i matematik skiljer sig med avseende på matematiska definitioner. Agahi menar att definitioner är mycket grundläggande inom matematiken, det är i definitionerna som de olika matematiska begreppens betydelse och egenskaper fastställs. Det är således i dessa som alla matematiska resonemang tar sin utgångspunkt. Undersökningen visade att de två läromedlen har ungefär liknande mängd definitioner men att de skiljde sig i vilken typ av definitioner de innehöll. Agahi menar också att gymnasielitteraturen tenderade till att i stor del beskrivas genom exempel och i några fall med exempel i kombination med att ange egenskaper. Högskoleläromedlet tenderade att fokusera på egenskaper i definitionerna och i vissa fall även ge exempel.

Varför skiljer sig då grundskole- och gymnasiematematiken från den på universiteten? Matematikhistoriskt (jämför Kline, 1990a,b,c) har matematiken som disciplin länge varit den typ av matematik som studeras vid universiteten, det vill säga *formell* eller *rigorös matematik* med definitioner, satser och krav på bevis. Matematiker har strävat efter denna rigorositet åtminstone sedan Euklides (omkring 300 f.Kr.) skrev sina 13 volymer av *Elementa*, även om de inte alltid varit lika formella. Kraven på exakta definitioner, satser och bevis som de är inom matematisk forskning idag kan sägas nådde dagens nivå under matematikens formella grundande under 1800-talet (Kline, 1990c). Följaktligen kan det inte vara så att universiteten nyligen börjat med en ny typ av matematik och grund- och gymnasieskolorna inte har hunnit med. En undersökning (Johansson, 2006) av ett populärt svenskt matematikläromedels utveckling från 1979 års upplaga fram till 2001 års upplaga visar att dessa två upplagor har mycket gemensamt, trots att de skiljs åt med tre läroplansreformer; Lgr 69, Lgr 80 och Lpo 94. Det som skiljer böckernas innehåll är enligt Johansson olika tematiska avsnitt och problemlösningsavsnitt. Undersökningen visar också att dessa avsnitt vanligtvis bara används i mån av tid och att eleverna tillbringar en stor del av tiden till egen räkning i boken. Följaktligen skulle tradition möjligen kunna ses som en del av anledningen till dagens skillnad mellan högskolematematiken och övriga svenska utbildningsformer, men det är svårt att dra någon slutsats av enbart detta. Därför blickar detta arbete framåt.

Till höstterminen 2011 får Sverige en ny gymnasieskola och det är återigen dags att anpassa undervisningsmaterial och läromedel. De gamla programmen som alla gav högskolebehörighet ersätts med yrkes- och studieförberedande program, där de senare ger högskolebehörighet (Skolverket, 2011). Yrkesprogrammen ska dock tillhandahålla kurser som individuellt val som ger högskolebehörighet. I samband med detta ersätts också den gamla kursplanen Matematik A (SKOLFS, 2000:5) med en ny ämnesplan för matematik och kurserna Matematik 1a, Matematik 1b och Matematik 1c (SKOLFS, 2010:261). Kursen Matematik 1a vänder sig till de yrkesförberedande programmen, Matematik 1b till bland annat det studieförberedande Samhällsvetenskapliga programmet medan Matematik 1c vänder sig till de studieförberedande programmen Teknikprogrammet och Naturvetenskapsprogrammet. Då den första kursen i matematik inte längre är gemensam för alla gymnasieelever, utan ges i olika versioner beroende på program, kan matematikundervisningen för den första kursen tillåtas att variera mer. Detta öppnar för idén om att åtminstone eleverna i målgruppen för Matematik 1c, de som ämnar att läsa vidare, kan undervisas en mer formell matematik. Innehållet i de olika versionerna av kurserna är till grunden detsamma, men de skiljer sig i hur djupt de går i de olika delområdena. Till exempel området *Taluppfattning, aritmetik och algebra* för de båda kurserna Matematik 1a och Matematik 1c. Innehållet i detta område för Matematik 1a är enligt SKOLFS (2010:261):

- Metoder för beräkningar med reella tal skrivna på olika former inom vardagslivet och karaktärsämnena, inklusive överslagsräkning, huvudräkning och uppskattning samt strategier för att använda digitala verktyg.
- Strategier för att använda hjälpmedel från karaktärsämnena, till exempel formulär, mallar, tumregler, föreskrifter, manualer och handböcker.
- Hantering av algebraiska uttryck och för karaktärsämnena relevanta formler samt metoder för att lösa linjära ekvationer. (SKOLFS, 2010:261, sidan 89)

Innehållet för Matematik 1c formuleras däremot som följande:

- Egenskaper hos mängden av heltal, olika talbaser samt begreppen primtal och delbarhet.
- Metoder för beräkningar inom vardagslivet och karaktärsämnena med reella tal skrivna på olika former, inklusive potenser med reella exponenter samt strategier för användning av digitala verktyg.
- Generalisering av aritmetikens räknelagar till att hantera algebraiska uttryck.
- Begreppet linjär olikhet.
- Algebraiska och grafiska metoder för att lösa linjära ekvationer och olikheter samt potensekvationer. (SKOLFS, 2010:261, sidan 101)

Skillnaderna består i att innehållet i Matematik 1a fokuserar på praktisk räkning med huvudräkning, överslagsräkning, tumregler och relevanta formler, medan Matematik 1c är mer teoretiskt inriktad med talteori, talbaser och potenser med reella exponenter. I Matematik 1a är det linjära ekvationer medan i Matematik 1c är det linjära ekvationer, olikheter och potensekvationer.

Under området *Geometri* i det centrala innehållet för Matematik 1c finns följande två punkter med[1]:

- Matematisk argumentation med hjälp av grundläggande logik inklusive implikation och ekvivalens samt jämförelser med hur man argumenterar i vardagliga sammanhang och inom naturvetenskapliga ämnen.
- Illustration av begreppen definition, sats och bevis, till exempel med Pythagoras sats och triangelns vinkelsumma. (SKOLFS, 2010:261, sidan 101)

Enligt den nya gymnasieförordningen (SFS, 2010:2039, 1 kapitlet 4 §) ska inte det centrala innehållet i ämnesplanerna vara en begränsning utan utrymme ska ges till lärare och elever för att tillsammans utforma undervisningen. Det vill säga, uppdelningen av en kurs centrala innehåll behöver inte påverka undervisningens upplägg. Dessutom kan innehåll utöver det centrala innehållet läggas till om det behövs. Detta gör att punkterna givna ovan kan genomsyra hela undervisningen istället för att begränsas till ett geometriavsnitt. Frågorna som återstår är således vilket innehåll som behövs och om det är möjligt att täcka det centrala innehållet med formell matematik inom kursens tidsramar och om det är möjligt att undervisa innehållet med formell matematik för gymnasieelever.

[1] Det kan påpekas att dessa två punkter även finns med i Matematik 1b med texten ”inom naturvetenskapliga ämnen” utbytt mot ”inom olika ämnesområden”. Punkterna finns däremot inte med under centralt innehåll för Matematik 1a.

1.1 Syfte och frågeställning

Detta projekts huvudsyfte är att undersöka möjligheten och lägga grunden för en formalisering av gymnasiematematiken, genom att ta fram en början till undervisningsmaterial motsvarande innehållet för nya gymnasieskolans Matematik 1c samt att se om och hur denna typ av matematik kan undervisas i skolan. Fokus ligger på att ta fram ett kompendium med en inledning till rigorös matematik, en grund att bygga fortsatt undervisning på, för att se hur mycket som krävs innehållsmässigt för att inom ämnesplanens ramar undervisa formell matematik. Med rigorös och formell matematik avses matematik väl grundad i logiskt resonemang med exakta definitioner och satser bevisade utifrån dessa.

De frågeställningar som ligger till grund för detta arbete är följande:

1. På vilka sätt tillåter, eller hindrar, gymnasieskolans nya ämnesplan i matematik att undervisa formell matematik?

2. På vilka sätt kan ett undervisningsmaterial för formell matematik motsvarande Matematik 1c se ut?

3. Hur är möjligheterna att undervisa formell matematik på gymnasienivå?

Det har redan konstaterats ovan att fråga 1 delvis redan besvarats, juridiskt är det tillåtet att undervisa formell matematik. En del som inte besvarats är dock huruvida det är möjligt inom tidsramarna eller om det krävs för mycket omkringliggande teori för att kunna behandla hela kursens centrala innehåll på detta sätt. Tyvärr kan inte denna fråga i sin helhet besvaras inom ramarna för detta arbete då det skulle innebära att utveckla ett läromedel för hela Matematik 1c. Att utveckla en inledning till ett sådant borde dock ändå ge en viss uppskattning av hur mycket extra innehåll som krävs. En ytterligare del av fråga 1 är vilken typ av övningsuppgifter som ämnesplanen kräver. Ämnesplanen för matematik (SKOLFS, 2010:261) talar om olika förmågor som eleverna ska få möjlighet att utveckla.

För att precisera vilka delar av fråga 1 som detta arbete ska försöka att besvara, kan frågan istället delas upp i följande delfrågor.

1. På vilka sätt tillåter, eller hindrar, gymnasieskolans nya ämnesplaner i matematik att undervisa formell matematik?

    a) Hur mycket innehåll behövs uppskattningsvis för att undervisa Matematik 1c med formell matematik?

    b) Vilken typ av elevarbete, om något särskilt, kräver ämnesplanen?

Kapitel 2

Tidigare forskning

I detta kapitel redovisas tidigare forskning som är relevant för arbetet. Det inleds med forskning och undersökningar om matematikundervisningen i svensk gymnasieskola. Därefter följer några resultat om skillnaderna mellan gymnasieskolans och högskolans matematikundervisning. Avslutningsvis behandlar sista avsnittet generell forskning om lärande och lärande i matematik.

2.1 Matematikundervisningen i svensk gymnasieskola

Skolinspektionen gjorde 2010 en granskning av matematikundervisningen i Matematik A i 55 gymnasieskolor spridda över landet. Skolinspektionens rapport (Skolinspektionen, 2010) inleder med att ta upp resultaten för TIMSS Advanced 2008 (Skolverket, 2009). Rapporten visar bland annat att alla svenska elevers prestationer sjunkit, både hög- och lågpresterande. Skolinspektionens granskning har fokuserat på den gamla gymnasieskolans första kurs – Matematik A. Med *den gamla gymnasieskolan* avses den som är gällande till den 30 juni 2011, därefter tar *den nya gymnasieskolan* vid från och med den 1 juli.

I sin granskning observerar Skolinspektionen att de nationella målen inte styr matematikundervisningen som de borde göra. De konstaterar att detta dels beror på bristande kunskaper om läroplanen hos lärarna samt att det finns en tradition i hur undervisningen i Matematik A utformas. De skriver att

> [f]lertalet lektioner innehåller i huvudsak två delar, en gemensam genomgång av ett moment följt av elevernas egna arbete. I en sådan utformning finns inget eller mycket begränsat utrymme för att arbeta med helhet och sammanhang i utbildningen. Eleverna får inte heller möjlighet att träna problemlösning, förmåga att se samband och att resonera, argumentera och uttrycka sig såväl muntligt som skriftligt, med andra ord; utvecklas mot målen att sträva mot. (Skolinspektionen, 2010, sidan 16)

Fortsatt menas i rapporten att ”[d]en i tid klart dominerande arbetsformen är enskilt arbete med uppgifter ur läroboken, där läraren går runt och hjälper till” (Skolinspektionen, 2010, sidan 16). Detta stämmer också överens med resultaten i en undersökning av Johansson (2006). Johansson citerar även en tidigare undersökning av Skolverket, som hade ansvaret för granskning av skolor innan den nuvarande Skolinspektionen fick uppdraget istället.

> Granskningen visar att det är frapperande vilken dominerande roll läroboken har i undervisningen, både i positiva och negativa termer, och dess roll för elevernas lust eller olust inför matematiklärandet. Det gäller delvis också för de tidigare skolåren, men framför allt från år 4-5 och uppåt och mest påtagligt i de senare åren i grundskolan, på gymnasieskolan och i vuxenutbildningen. Såväl innehåll, uppläggning som undervisningens organisering styrs av boken i påfallande hög grad. Matematik är för både elever och lärare kort och gott det som står i läroboken. (Skolverket, 2003, sidan 39)

Ett liknande uttalande återkom 2004 i matematikdelegationens utlåtande.

> Den växande trenden av ”tyst räkning” i svensk skola är skadlig. För att de lärande skall få lust för och vilja att lära sig meningsfull matematik krävs att lärares kompetens och tiden för matematikundervisning utnyttjas bättre. Lärare måste ges möjligheter till och [sic] också själva sträva efter att aktivt leda och variera verksamheten i klassrummet. (SOU, 2004:97, sidan 15)

Men redan 1946 uttryckte den dåvarande Skolkommittén att undervisningen var beroende av läromedlet till en alltför hög grad (Johansson, 2006). Detta leder till slutsatsen att matematikundervisningen i svensk skola följt läroboken och fortsätter att följa läroboken trots ett påpekande redan 1946 och att både Skolverkets rapport från 2003 och Skolinspektionens rapport från 2010 givit som förbättringsförslag att minska användandet av läroboken i undervisningen. Skolverket föreslog ”En minskning av lärobokens närmast totala dominans i undervisningen till förmån för olika läromedel och undervisningsmateriel för att nå de nationella målen” (Skolverket, 2003, sidan 56). Men utvecklingen av svensk matematikundervisning verkar stagnerad eftersom samma problem fortfarande finns 2010. Denna undervisningsmetod, att arbeta efter boken, är inte bra för uppfyllandet av läro- och kursplaner (Skolinspektionen, 2010) och heller inte för elevernas lärande. Lektionsbesöken som Skolinspektionen (2010) utförde visar att när läraren inte hinner hjälpa eleverna då hjälper de varandra. Detta resulterar i att eleverna får ”rätt svar” av varandra eller tittar i facit utan att förstå varför det blev fel. Denna arbetsmetod kan liknas med *supervised learning*-algoritmer inom det datalogiska området maskininlärning (jämför Marsland, 2009). Dessa går ut på att presentera exempel där programmet gör en kvalificerad gissning för att därefter erhålla det korrekta svaret. Programmet uppdaterar sig med avseende på svaret, om det var korrekt eller ej, och därefter ges ett nytt exempel där programmet får gissa igen. Beroende på komplexiteten i mönstret bakom och exemplen själva kan det räcka med ett tio- eller hundratal exempel för att datorn ”alltid” ska gissa rätt. Det händer i vissa fall att programmet lär sig alla träningsexempel och sedan svarar fel på nya exempel som introduceras som inte var en del av träningsdata.

En annan effekt av det individuella räknandet är färre genomgångar eftersom lärarna upplever att genomgångar stör eleverna då de nått olika långt i boken. Boken styr, enligt Skolinspektionen, undervisningen i hög grad då många elever, och tyvärr även många lärare, ser som målet för matematikstudierna att ”hinna med boken”. Detta leder till ytterligare försämrad undervisning.

När det kommer till inflytande vid utformandet av undervisningen anger enligt Skolinspektionen (2010) 64 procent av lärarna att de påverkas av läroboken. Det är 31 procent av lärarna som anger att kursplanen inte påverkar deras undervisning och ungefär en fjärdedel anger att hela kursplanen påverkar utformandet av undervisningen. Det är dessutom 39 procent som nämner de nationella proven och 20 procent som säger att eleverna påverkar utformandet av undervisningen.

Vad gäller läroboken litar de flesta lärarna på att läroboken tolkar kursplanen på ett rimligt sätt. Skolinspektionen anser att dessa ”ofta är skevt fokuserade på att eleverna ska räkna utifrån lösta exempel och inbjuder sällan till träning av andra kompetenser” (Skolinspektionen, 2010, sidan 20). Det bör dock tas i beaktning att läromedelsproduktionen idag är en industri och därför påverkas design och produktion inter bara av pedagogiska utan även av ekonomiska faktorer. Johansson (2006) undersöker i sin avhandling utvecklingen av en känd svensk lärobok i matematik från 1979 års upplaga till 2001 års upplaga. Hon kommer där fram till att de väsentliga förändringarna mellan upplagorna är antalet sidor, då de nyare upplagorna fått extra tema- och problemlösningsavsnitt. Sådana avsnitt anges i Skolinspektionens rapport som delar som ”aldrig hinns med” eller arbetas med i mån av tid. Det kan således påstås att lärarnas antagande om att läroböckerna tolkar läroplanen på ett rimligt sätt är felaktigt eftersom att de delarna i böckerna som används är av samma karaktär för 1994 års läroplan som för 1969 års läroplan och de delar som skiljer dem åt hinns inte med.

Johansson refererar till Selander och Skjelbred (2004) när hon skriver att

> en syn på lärande är, i någon bemärkelse, en del av varje lärobok. Man kan till exempel känna igen behavioristiska idéer i en bok som fokuserar på att få korrekta svar till väldefinierade frågor. Från ett konstruktivistiskt och sociokulturellt perspektiv skulle det vara viktigare att börja i elevernas egna erfarenheter och skapa problem som föder diskussion och samarbete. (Johansson, 2006, sidan 6, min översättning)

Den behavioristiska inlärningsteorin utvecklades under 1950- och 1960-talen av amerikanen Frederic Skinner. Den utgår från observerade beteenden och ser den lärande som en svart låda som producerar olika beteenden beroende av olika stimuli (Engström, 2006). Karakteristiskt för behaviorismen är att dela upp kunskapsstoffet i små enheter som sedan vänjs in som ett beteende. Den läroboksundervisning som beskrevs ovan blir tydligt behavioristisk när läraren inte hinner med alla eleverna, även om den kanske hade sin utgångspunkt i det sociokulturella genom att läraren diskuterar med eleverna när de inte förstår eller får fel svar.

En motivering för läroboksundervisningen är att undervisningen kan individualiseras, det vill säga anpassas till varje enskild elev, vilket är ett krav i läroplanen (Johansson, 2006). Då kan varje elev ”räkna i sin egen takt” och ingen hindras från att utvecklas, vilket är vad läroplanen säger. Av dessa granskningar av skolan att döma verkar det dock som att de flesta elever hindras från att utvecklas inom matematiken (Skolinspektionen, 2010; Skolverket, 2003).

Vilken typ av matematik är det då eleverna får via läroboken? Enligt Johansson är det ”mycket få delar i läroboken där matematik diskuteras som en vetenskaplig disciplin” (Johansson, 2006, sidan 24, min översättning). Om läraren i sin undervisning följer läroboken kan eleverna få mindre erfarenhet av matematikens roll i samhället och av dess historiska utveckling än vad som avses i läroplanen. Johansson fann följande resultat i sin studie av lärobokens roll i klassrummet:

1. Eleverna arbetar enbart med uppgifter från boken under den egna arbetstiden under lektionen, vilket är i genomsnitt mer än halva lektionstiden.

2. Under den gemensamma arbetstiden av lektionen är exemplen och uppgifterna som läraren presenterar huvudsakligen från läroboken.

3. Sättet som matematiken presenteras som vetenskap är jämförbart med det i boken. Det betyder att knappt några andra definitioner, konventioner, procedurer eller regler än de som återfinns i boken presenteras för eleverna.

4. Hemläxor ges inte regelbundet, men när de ges ska eleverna arbeta med uppgifter i boken. (Johansson, 2006, sidan 25, min översättning)

Det verkar som att läroboken måste täcka in allt i läro- och kursplanen för att eleverna ska få den undervisning som de har rätt till, böckerna gör dock inte det trots lärarnas förväntningar. Johansson avslutar dock med att konstatera att det går att använda boken på ett bra sätt för att uppfylla alla mål i läro- och kursplanen, ”lärare borde inte vara lärobokens slavar utan dess intelligenta mästare, som drar nytta av potentialen hos boken, men undviker dess svagheter” (Johansson, 2006, sidan 30, min översättning).

2.2 Skillnaderna mellan gymnasieskola och högskola

Thunberg m.fl. (2006) skriver om ett projekt genomfört vid Kungliga Tekniska Högskolan (KTH), där de undersökt studenternas kunskaper och hur dessa förhåller sig till förväntningarna när det börjar sina studier vid högskolan.

Under projektet fann de att

> [m]ycket av det som högskolan uppfattar som viktiga förkunskaper i matematik finns inte längre med i gymnasiets kurser. Andra saker finns visserligen med men behandlas med helt andra kunskapsmål än vad högskolan önskar och förväntar sig. (Thunberg m.fl., 2006, sidan 11)

De diskuterar ett exempel om hur logaritmfunktionen tas upp men verkar behandlas numeriskt och med räknaren. Gymnasieskolan verkar alltså inte ta upp logaritmfunktionens algebraiska egenskaper till en tillfredsställande nivå. De säger vidare att formelsamlingar och grafritande räknare är självklara hjälpmedel i gymnasieskolan, beräkningar och formler ses däremot som ett hinder som står i vägen för begreppsförståelse och modellering (Thunberg och Filipsson, 2005). Deras, högskolans, syn är istället att ”formler ingår i en konsistent helhet, de kan härledas ur varandra och de kan testas, falsifieras och bevisas” (Thunberg och Filipsson, 2005, sidan 7). Därför förväntar sig högskolan att eleverna ska ha mer kännedom om formler och identiteter utan att behöva ha tillgång till formelsamling. Detta ses tydligt i följande citat.

> Vare sig det är fråga om kvadreringsregler eller deriveringsregler, logaritmlagar eller trigonometriska formler, så förväntas studenterna kunna dem, förstå dem och kunna härleda dem. Sådana krav existerar inte på gymnasiet. (Thunberg m.fl., 2006, sidan 12).

Lärarna på högskolan har också observerat en ”svårighet att lösa uppgifter som kräver flera steg” och en ”matematisk oföretagsamhet” hos eleverna (Thunberg och Filipsson, 2005, sidan 7). Detta kan bero på den behavioristiska fråga-svar-undervisning som Skolinspektionen (2010) ovan rapporterade om. Utöver detta har Thunberg m.fl. observerat i studenters tentamenslösningar att studenten mitt i en lösning ”synbarligen utan att reflektera, postulerar en falsk identitet” (Thunberg m.fl., 2006, sidan 12). Den tolkningen forskarna gör av detta är att studenterna på gymnasiet vid behov brukade söka efter lämpliga formler i sin formelsamling. I avsaknaden av formelsamlingen söker de istället i minnet. Resultatet blir att de helt verkar sakna förmåga att skilja en sann formel från en falsk, vilket resulterar i att de försöker att använda ”falska identiteter”. Många studenter verkar uppfatta en potentiell formel lika god som en annan, om det inte vore för att vissa är ”tillåtna” medan andra är ”förbjudna” (Thunberg m.fl., 2006, sidan 12). Detta kan ha att göra med den syn på formler och beräkningar som författarna påstod att gymnasieskolan har.

Agahi (2010) beskriver en undersökning som gjorts av Hemmi (2006) där hon undersökte studenters första kontakt med matematiska bevis. Undersökningen gjordes bland nybörjarstudenter antagna till matematikintensiva utbildningar. I enkäten som användes uppgav nästan hälften att deras lärare under gymnasietiden hade bevisat påståenden varje vecka eller varje lektion. Det var dock få som uppgav att de själva hade konstruerat bevis. Studenterna uppgav också att det var ovanligt att elevers egna undersökningar ledde till hypoteser som behövde bevisas. Detta visade sig stämma väl överens med en studie av läromedel för gymnasiet (Agahi, 2010) där det visade sig att cirka två procent av utrymmet i läroböckerna var tillägnat uppgifter av beviskaraktär. Studenterna säger också i enkäten att bevis är svårare än att göra beräkningar, men de önskar ändå lära sig mer om bevis och att de hade lärt sig mer om det redan på gymnasiet.

Hemmi (2006) säger också att både universitetslärarna och studenterna själva tyckte att studenterna hade problem med exakt matematiskt språk. Studenterna tyckte att det var ett annorlunda språk jämfört med det de stött på under gymnasiet. Engström (2006) fann i sin avhandling att ett exakt matematiskt språk är av vikt för elevers lärande i matematik.

Agahi (2010) har undersökt hur ett gymnasie- och ett högskoleläromedel i matematik skiljer sig med avseende på matematiska definitioner. Definitioner är mycket grundläggande inom matematiken, det är i definitionerna som de olika matematiska begreppens betydelse och egenskaper fastställs. Agahi menar att det således är i dessa som alla matematiska resonemang tar sin utgångspunkt. Undersökningen visade att de två läromedlen har ungefär liknande mängd definitioner men att de skiljde sig i vilken typ av definitioner de innehöll. Gymnasielitteraturen tenderade till att i stor del beskrivas genom exempel och i några fall med exempel i kombination med att ange egenskaper. Högskoleläromedlet tenderade att fokusera på egenskaper i definitionerna och i vissa fall även ge exempel. Detta kan tänkas ger skilda bilder av hur eleverna uppfattar matematiken, speciellt hur de uppfattar dess deduktiva grund. Matematikens deduktiva grund bygger på tydliga och exakta definitioner för att från dessa kunna härleda resultat. Detta skulle kunna vara en del av anledningen till att gymnasieeleverna känner att det matematiska språket och bevisföring är svårt.

2.3 Lärande i matematik

Jag tar min utgångspunkt i konstruktivismen. Denna teori utgår från att det är den lärande som själv måste utveckla sina kunskaper (Vygotsky 1978, i Engström 2006). Det är således viktigt vad en lärande gör och hur den gör det. Reflektion är grundläggande. Den som lär utgår alltid från vad den redan vet och försöker utifrån detta att skapa kunskap. Det blir lärarens uppgift att skapa situationer som möjliggör den lärandes utveckling av kunskaper. Detta blir då en viktig del att ha som utgångspunkt i utformandet av undervisning och undervisningsmaterial. Vygotsky utvecklar denna teori och lägger vikten vid språket och kommunikation. Engström refererar till Vygotsky (1978) och skriver att ”språket är som en bro mellan externt och internt tal” (Engström, 2006, sidan 68). Språket, och kommunikationen, kan därmed ses som en viktig del i utvecklingen av kunskapen. Kunskapen är intern hos individen, medan språket används som kommunikationen med omvärlden, som är extern och från vilken situationen inhämtas. Därefter reflekterar den lärande och ny kunskap utvecklas.

Vygotsky (1978) inför också ett viktigt begrepp – *den proximala utvecklingszonen*, eller ZPD från engelskans *zone of proximal development*. Vygotsky fokuserade på utvecklingen av psykologiska funktioner. ZPD utgörs av de psykologiska funktioner som för tillfället är under utveckling hos den lärande. Lärande uppnås enbart när den riktas mot dessa funktioner under utveckling. Anledningen är för att istället för att bara ge fler kunskaper blir undervisningen en drivkraft för utvecklingen och formar dessa funktioner efter innehållet (Kinard och Kozulin, 2008). Kinard och Kozulin (2008) skriver att elevers problem med matematik inte beror på bristande kunskaper i matematik utan snarare avsaknad av kognitiva funktioner från tidigare utvecklingsstadier; analys, planering och reflektion. De föreslår att ingripande riktat mot utveckling av dessa kognitiva funktioner istället för ”matematisk drillning” utan dessa basfunktioner är bättre på lång sikt. Kinard och Kozulin tar också upp ett exempel som visar på denna problematik. ”Det finns 26 får och 10 getter på ett skepp. Hur gammal är skeppets kapten?” (Kinard och Kozulin, 2008, sidan 1, min översättning). Denna uppgift gavs till elever runt om i Europa, mer än 60 procent försökte att lösa problemet genom att kombinera de givna talen med exempelvis addition. Elevernas problem var således inte matematisk kunskap, de kunde addera och multiplicera. Det de däremot saknade var de kognitiva funktioner som krävs för ett matematiskt resonemang – analys, planering och reflektion.

> De var uppenbarligen inte vana vid att tänka på att problem kan ha en, flera, oändligt antal eller inga lösningar. För dessa elever verkade matematik vara ett associativt spel där vinnaren gissar rätt på vilken standardoperation som passar in i standardproblemet. (Kinard och Kozulin, 2008, sidan 1, min översättning)

Detta påminner om läroboksundervisningen som togs upp ovan, där eleverna gör uppgifter och försöker komma fram till samma svar som står i facit.

Ett intressant resultat om lärande i matematik gäller läsförståelse för att läsa matematisk litteratur. Österholm (2006) undersöker i sin avhandling om det krävs en särskild läsförmåga för att läsa matematiska texter. Texterna som behandlas i avhandlingen är dock matematik från grundläggande universitetsnivå, men är ändå intressanta eftersom att om en viss lässtrategi finns måste den ha utvecklats tidigare i livet, exempelvis under gymnasiala studier. Han kommer fram i sin undersökning att de deltagande studenterna faktiskt har en speciell läsförmåga för att läsa matematik, nämligen att fokusera på symbolerna. I undersökningen jämfördes läsning av matematiska texter med och utan symboler. Det visade sig att när texten saknade symboler använde studenterna en mer generell läsförmåga, som även används för andra typer av texter. Läsförståelsen av de olika texterna skilde sig på så sätt att när den speciella matematiska läsförmågan användes uppnåddes en sämre läsförståelse än när den generella läsförmågan användes. Österholm föreslår därför att det finns ett behov att fokusera på läsning och läsförståelse inom matematikundervisningen i tidigare stadier, gymnasieskolan och tidigt på universitetet.

Kilhamn (2011) har i en avhandling undersökt metaforers roll i matematikundervisningen rörande negativa tal. Hon skriver att negativa tal är ett område inom matematiken som kräver en övergång från intuitiv till formell matematik. Det är därför intressant att här studera metaforens roll. Inom undervisning om negativa tal är det vanligt att läraren eller läroboken använder olika modeller som termometer, skuld och tillgång, hissar etc. Kilhamn betraktar dessa modeller ur ett metaforperspektiv, det vill säga metaforer har en källdomän, en måldomän och en avbildning från käll- till måldomänen. En del av problematiken är att en metafor bara täcker vissa aspekter av ett begrepp och andra tas inte upp. Det behövs därför flera metaforer för att helt täcka ett visst begrepp. En annan del är att lärare och elever ibland använder olika källdomäner och måldomäner. Exempelvis utgör oftast modellen källdomänen för eleverna, medan den för läraren kan utgöra måldomänen. Det vill säga, läraren avbildar matematiska begrepp på fysiska verkligheten medan eleverna istället avbildar den fysiska verkligheten på matematiska objekt. När eleverna sedan börjar med negativa tal utgår de, och undervisningen, från sina metaforer om de naturliga talen och försöker utvidga dem. För de olika metaforerna som krävs för att täcka de naturliga talen fungerar denna utvidgning olika bra. Vissa utvidgningar leder till motsägelser mellan de olika metaforerna, vilket kan skapa förvirring hos eleven.

En annan problematik med undervisningen som Kilhamn (2011) presenterar är att metaforiskt resonerande blir ett undervisningsmål. Detta görs i formen av att eleverna ges metaforer för att resonera kring enskilda uppgifter. Anledningen är att de ska förstå och kunna lösa uppgiften. En intressant fråga i sammanhanget är vad syftet med undervisningen faktiskt är. Är syftet att ”eleverna ska kunna lösa räkneuppgifter” eller är syftet att ”engagera eleverna i kreativt matematiskt arbete där de kan upptäcka hur det utvidgade talområdet fungerar som en del av ett algebraiskt system ... ?” (Kilhamn, 2011, sidan 277) Den algebraiska strukturen hos de negativa talen ger dem egenskaper som är abstrakta och därför behöver visas med ett matematiskt resonemang, därför räcker det inte att lösa räkneuppgifter. Metaforer om skulder, minusgrader och andra konkretiseringar slutar att fungera när det kommer till att förklara att $(-1) \cdot (-1) = 1$, det vill säga att två skulder multiplicerat med varandra är en tillgång eller icke-skuld.

Engström (2006) kommer i sin avhandling fram till att formen på vilken läraren formulerar problemen och utformar undervisningen påverkar elevernas lust till lärande. En av de lärare vars lektioner hon besökt, en lärare i Schweiz, använder en utforskande uppgiftsformulering. Uppgiftens formuleras som att eleverna ska utforska det begrepp som de just nu arbetar med och de ska själva formulera, och bevisa, de resultat som de finner. Det finns alltså inga från början givna resultat som de ska finna och bevisa, inte heller några specifika instruktioner såsom ”gör först ... och sedan ... ”. Detta menar Engström (2006) kan leda till att både generera nyfikenhet och vara en utmaning, eftersom att eleverna innan inte vet vad de kommer att hitta. Eleverna som deltog under dessa lektioner var aktiva och de arbetade vidare trots att läraren sammanfattat de funna resultaten för klassen.

Problematik som Engström fann i observationerna av de svenska lärarna var att eleverna var koncentrerade på att göra rätt och få bekräftelse från läraren att de nått rätt resultat. Detta menar Engström (2006) kan hindra dem från att utforska och upptäcka nya saker eller ställa sig frågor som ”vad händer om ... ?”. Detta var också en del av de kulturella skillnader som Engström (2006) påpekade fanns mellan det schweiziska och de svenska klassrummen. I Schweiz litade eleverna på läraren, de visste att läraren aldrig skulle ge dem en uppgift som de inte lärde sig någonting av. De svenska eleverna var däremot mer ifrågasättande, en vanlig fråga från eleverna var ”vad ska vi med det här till?”. Engström (2006) konstaterar också att elevernas inställning till läraren som auktoritet kan påverka elevernas sätt att arbeta.

Kapitel 3

Metod

För att genomföra denna undersökning fick jag vid en gymnasieskola i mellansverige fyra lektioner om 50 minuter med en klass vid skolans naturvetenskapliga program. Dessa lektioner var först fördelade på fyra efter varandra följande veckor. De blev sedan omplanerade, på grund av skolteater och lovdagar, och lektionstillfällena blev utspridda på totalt sju veckor. Under dessa lektionstillfällen undervisade jag eleverna med delar av det material som utvecklats under första delen av projektet.

Som undersökningsmetod valdes deltagande observation följt av en enkät och en intervju med några enskilda elever. Enligt Kullberg (2004) som refererar till Denzin (1978) är en deltagande observation ”en fältstrategi som simultant kombinerar dokumentanalys, intervjuande av informanter, direkt deltagande och observation samt introspektion” (Denzin, 1978, sidan 183, i Kullberg, 2004, sidan 92, min översättning).

Henriksson och Månsson (1996) skriver, via Kullberg (2004), att är det viktigt att ta i beaktning avståndet mellan forskaren och den studerade gruppen (Henriksson och Månsson, 1996, sidan 14 i Kullberg, 2004, sidan 93). När jag i denna undersökning deltog gjorde jag det som elevernas lärare. Det krävdes då att vara extra koncentrerad för att uppfatta detaljerna i situationen men också att inse att allt inte kan observeras till fullo. Denna typ av deltagare benämner Walcott som den aktive deltagaren, den aktive deltagaren ”har ett arbete att utföra i undersökningsområdet förutom sitt forskningsarbete” (Walcott, 1988, sidan 194 i Kullberg, 2004, sidan 96). I mitt fall var detta arbete undervisningen och min forskning var att undersöka elevernas möjlighet till lärande av detta material.

Som intervjumetod valdes en semistrukturerad intervjumetod som enligt Dalen, Kärnekull, och Kärnekull (2008) innebär att intervjutekniken befinner sig mellan att vara helt strukturerad, med frågor och smala svarsutrymmen, och fullständigt ostrukturerad, där informanten helt styr innehållet. Anledningen till denna metod var att låta informanterna, de intervjuade eleverna, styra innehållet i intervjun. Jag hade inga förberedda frågor utan utgick från grundfrågan ”vad är din upplevelse av detta projekt?” och gick därefter vidare beroende på vad eleven tog upp och vad jag ville veta mer om.

3.1 Urval

I det geografiska området finns ett tiotal gymnasieskolor, fristående och kommunala. Skolan som valdes är en kommunal skola med bland annat teknik- och det naturvetenskapliga programmet. Den valdes för att den är kommunal och har programmen som är målgrupp för Matematik 1c och för att den ligger lättillgängligt med lokaltrafik. Skolan kontaktades, se avsnitt A.1, och rektor vidarebefordrade min förfrågan till berörda lärare på programmen, som valde den deltagande klassen. Den deltagande klassen blev årskurs två vid det naturvetenskapliga programmet. Det gick 15 elever i klassen vid undersökningstillfället. De flesta eleverna var under undersökningen i slutet av kursen Matematik D. Detta var inte den avsedda målgruppen för undersökningen, men under den delen av läsåret då de nationella proven genomförs är det svårt att få lärare och elever som vill skänka lektionstid när innehållet i lektion och undersökning inte precis överlappar varandra.

Eleverna i klassen fick, i enlighet med de forskningsetiska principer som givits ut av Vetenskapsrådet (2002), själva välja om de ville delta i undersökningen eller ej. De blev informerade om det regelverk som gäller denna typ av undersökningar, se Bilaga A.

Alla elever fick fylla i enkäten men enbart ett fåtal intervjuades. Klassen, om 15 elever, satt grupperad i cirka fem informella grupper, med 2-4 elever i varje. En elev från varje sådan informell grupp tillfrågades för intervju. Alla tillfrågade ställde upp. Två av eleverna intervjuades enskilt och de resterande tre intervjuades i grupp. Anledningen till denna uppdelning av intervjuerna var för att det annars inte vore tidsmässigt möjligt att intervjua samtliga. Eleverna som intervjuades enskilt var Carolina och Oscar, medan Sara, Jens och Mattias intervjuades tillsammans. Namnen är fingerade. Namnen är slumpmässigt valda utan försök att bevara den sociala information som föräldrarnas namnval innebär (se Aldrin, 2011).

3.2 Genomförande

Vid den första lektionen gick jag först igenom vad undersökningen handlar om och vilka regler som gäller, eleverna fick ta del av detta både muntligt och skriftligt. Dokumenten återfinns i avsnitt A.2.

Eftersom jag bara hade fyra lektioner att tillgå behövde jag välja ut det stoff som bäst representerar den typ av matematisk verksamhet som jag vill undersöka. För att hinna med detta var jag tvungen att hoppa över vissa delar i de tidigare kapitlen som inte behövdes som förkunskaper. Jag valde därför att gå igenom hela Kapitel 2, *Logik och bevis*; grundläggande mängdlära, avsnitten 3.1-3, innehållandes definitionen av mängd, grundläggande operationer och delmängder; de inledande avsnitten i Kapitel 4, *De naturliga talen*, innehållandes Peanos axiom för de naturliga talen samt härledningarna för associativitet och kommutativitet för addition av naturliga tal. Kompendiet finns i sin helhet i Bilaga B.

Mitt mål var att undervisningen skulle vara till naturen diskuterande. Det vill säga, jag gick igenom definitioner och inledde diskussion med eleverna om dessa och egenskaper som följer av de olika definitionerna. Jag upplevde dock detta som svårt då det var stor tidspress, jag kunde inte ta tillräckligt med tid för dessa diskussioner som jag hade önskat. De fick vid två tillfällen arbeta i grupper om två till tre elever. Vid det första tillfället, som var under den andra lektionen, fick de en uppgift att undersöka likhetsbegreppet för mängder. De fick två problem att arbeta med.

1. Undersök vad likhetsbegreppet innebär, vilka mängder är egentligen lika? Är $\{1, 2, 3\}$ lika med $\{1, 1, 3, 3, 2, 3, 2, 1\}$?

2. I inledning sades att en mängd kan innehålla andra mängder. En mängd X som tillhör en mängd M är då ett element som alla andra i mängden M. Om $X = \{1, 2\}$ och $M = \{X, 2, 3\} = \{\{1, 2\}, 2, 3\}$, vilka av följande utsagor är sanna och vilka är falska: $1 \in M$, $2 \in M$ och $3 \in M$ samt $\{1\} \in M$, $\{2\} \in M$ och $\{1, 2\} \in M$.

Dessa problem återfinns i kompendiet. Vid det andra tillfället, som var under den sista lektionen, fick de 15 minuter att i grupper om två läsa två sidor och förbereda en presentation av de lemman och satser som finns på sidorna samt bevisen för dessa. De två sidorna var avsnitt *4.4 Additionens algebraiska egenskaper*. De hade från lektionen innan fått i uppgift att bevisa de första två lemman som återfinns i avsnittet. Jag själv kompletterade elevernas presentationer där jag tyckte att det behövdes mer tydlighet för att alla elever skulle kunna ta del av hur bevisen genomfördes. Jag var tydlig med att det inte gjorde något att de inte förstått hela beviset utan att de skulle presentera det så långt de förstod och sedan ta hjälp av övriga i klassen. Den sista lektionen avslutades med en enkätstudie där alla elever deltog. Enkätundersökningen syftade till att ge en övergripande bild över klassens tankar om materialet och undervisningen.

3.3 Etiska synpunkter

De enkäter som lämnades in och transkriptioner av de intervjuer som genomfördes kan på grund av etiska själ inte bifogas i arbetet. Detta eftersom att kombinationen av denna information, uppnådda betyg; genomförda kurser; med mera, tillsammans med information om skolan kan användas för att identifiera enskilda individer, vilket strider mot de forskningsetiska principer som är utgivna av Vetenskapsrådet (2002).

Kapitel 4

Resultat och resultatanalys

I detta kapitel behandlas resultaten. Först behandlas kompendiets utformning där det redogörs för hur kompendiet utformats efter ämnesplanen och innehållet för Matematik 1c. Därefter följer resultaten från undersökningen av hur eller om denna typ av matematik kan undervisas på gymnasienivå. Resultaten analyseras allteftersom de presenteras och i analysen återknyts tidigare forskning.

4.1 Kompendiets utformning

För att besvara fråga 2 i studiens frågeställning, se avsnitt 1.1, utvecklade jag ett kompendium motsvarande en inledning till innehållet i kursen Matematik 1c. Kompendiet finns bifogat i Bilaga B. Jag valde en konstruktivistisk utgångspunkt i utformningen av kompendiet, att den lärande försöker att konstruera nya kunskaper utifrån vad den känner till sedan tidigare. Kompendiet börjar därför från grunden och alla kunskaper som eleven behöver byggs successivt upp från början till slut. Matematiken byggs upp med formell matematik där allt explicit definieras och alla fundamentala resultat som används för att byggas vidare på bevisas. Kilhamn (2011) talade om hur metaforer kan förvirra elever när de inte drar jämt utan istället leder till motsägelser. Hon skrev också att metaforerna används för matematiskt resonemang istället för matematiken själv. Det vill säga, verkligheten används för att lösa matematiska problem istället för att använda matematiken för att lösa matematiska problem som motsvarar problem från verkligheten. Kompendiet är därför utformat med strävan att ge eleverna en bild av matematiken som någonting som är oberoende av verkligheten, men som ändå kan användas för att modellera den. Detta är även, enligt min tolkning, målet för gymnasieskolans ämnesplan. Gymnasieskolans ämnesplan för matematik (SKOLFS, 2010:261) inleds kort med vad matematik är och beskriver sedan syftet med att ha ämnet i gymnasieskolan. Huvudsakligen ska eleverna utveckla förmåga att arbeta matematiskt, vilket är vad jag beskriver ovan. Att arbeta matematiskt innebär enligt ämnesplanen att ha en förståelse för matematikens begrepp och metoder samt problemlösningsstrategier. Genom att arbeta med och ta del av matematikens begrepp, speciellt de fundamentala begreppen definition, sats och bevis, och arbeta med dessa får eleverna chansen att med kompendiets hjälp skapa sig en förståelse för hur matematiken är strukturerad och hur den fungerar.

Det är också upplagt så att eleven får chans att konstruera sina kunskaper genom egen erfarenhet. Engström (2006) tog upp att det hade en positiv inverkan på elevernas lärande att ha en undersökande problemformulering. Ämnesplanen kräver också att undersökande aktiviteter är en del av undervisningen och att den ska ge eleverna möjligheter att kommunicera matematik med olika uttrycksformer. Kompendiet är utvecklat med den tanken i bakgrunden. Det är förvisso svårt att genomgående utforma kompendiet med öppna utforskande uppgifter eftersom att vissa saker måste garanteras att eleverna har med sig till nästa avsnitt där dessa resultat ska användas. Därför finns utforskande uppgifter efter definitionerna där eleverna får utforska vad definitionen ger upphov till för resultat. Det finns då möjlighet för eleverna att själva upptäcka de resultat som senare kommer att presenteras som lemman och satser i avsnittet. Öppna och utforskande uppgifter ger dessutom en uppmuntran till diskussion och resonemang, detta innebär att eleverna kan diskutera med varandra och de kan även kommunicera sina resultat på olika sätt. Det finns dock även uppgifter som är av mer styrande karaktär.

Ämnesplanen uppmanar också till att låta eleverna ”utmana, fördjupa och bredda sin kreativitet och sitt matematikkunnande” (SKOLFS, 2010:261, sidan 87). Den traditionella matematikundervisningen anknyter ofta till fysikaliska eller geometriska problem i vardagen, till exempel att räkna ut hastighet eller vilka mått som behövs för att bygga en altan av en viss area. Dessa kunskaper behöver eleverna naturligtvis, men kompendiet tar upp några mer okonventionella exempel. Exempelvis att införa en ekvivalensklass på alla världens fåglar eller införa olika relationer på mängden av kort i en kortlek. Detta kan inspirera till en kreativitet att använda matematiken på sätt som eleverna inte tidigare tänkt på, och att eleverna själva skapar egna konstruktioner som de kan utforska med hjälp av matematiken. Detta återknyter också till att undervisningen ska ge eleverna erfarenhet av matematikens ”kreativa kvaliteter och mångfacetterade karaktär” (SKOLFS, 2010:261, sidan 87).

Kompendiet är också skrivet med mycket text, med ett flytande språk. Istället för $a = b$ skrivs ofta istället *a är lika med b*. Uppgifterna är också invävda i texten istället för att vara grupperade tillsammans i slutet av varje avsnitt. De hamnar då på det i texten relevanta stället och det är enkelt att veta precis vad som behövs för att kunna ta sig an uppgiften, nämligen bara den text som lästs tidigare. Anledningen till detta utformande är delvis ett resultat av att försöka komma bort från den räknecentrerade matematiken, som tas upp i Skolinspektionen (2010); Johansson (2006); Skolverket (2003), där att hinna med så många tal som möjligt verkar som det centrala målet. Uppgifterna blir här en del av innehållet istället för en samlad gruppering på vilken all fokus kan läggas, nu tvingas fokus till att även omfatta övrigt innehåll – själva matematiken. Den andra delen i utformandet kommer från resultaten från Österholm (2006). Han kommer i sin avhandling fram till att de flesta använder en särskild läsförmåga när de läser matematik, en läsförmåga som enbart fokuserar på symbolerna. Med ett mer textinriktat upplägg kanske eleverna när de läser kompendiet använder den allmänna läsförmågan, som Österholm (2006) kommer fram till ger en bättre läsförståelse även för matematiska texter.

I ämnesplanen skrivs också att undervisningen ska utmana eleverna och ge dem ”erfarenhet av matematikens logik, generaliserbarhet, kreativa kvaliteter och mångfacetterade karaktär” (SKOLFS, 2010:261, sidan 87). Eftersom kompendiet bygger upp den matematiska grunden på ett formellt vis, grundat i logiken och med definitioner, satser och bevis får eleverna genom detta erfarenhet av matematikens logik och generaliserbarhet.

Avsnittet *Ämnets syfte* i ämnesplanen avslutas med följande formulering:

> Undervisningen i ämnet matematik ska ge eleverna förutsättningar att utveckla följande:
>
> 1. Förmåga att använda och beskriva innebörden av matematiska begrepp samt samband mellan begreppen.
> 2. Förmåga att hantera procedurer och lösa uppgifter av standardkaraktär utan och med verktyg.
> 3. Förmåga att formulera, analysera och lösa matematiska problem samt att värdera valda strategier, metoder och resultat.
> 4. Förmåga att tolka en realistisk situation och utforma en matematisk modell samt att använda och utvärdera en modells egenskaper och begränsningar.
> 5. Förmåga att följa, föra och bedöma matematiska resonemang.
> 6. Förmåga att kommunicera matematiska tankegångar muntligt, skriftligt och i handling.
> 7. Förmåga att relatera matematiken till dess betydelse och användning inom andra ämnen, i ett yrkesmässigt, samhälleligt och historiskt sammanhang. (SKOLFS, 2010:261, sidan 87)

I den form som kompendiet bifogas i Bilaga B ger det eleverna förutsättningar att utveckla förmågorna 1, 3, 5 och 6.

För att konstruera bevis och använda den typ av matematik som kompendiet behandlar krävs att eleverna använder och ser sambanden mellan begreppen, genom att arbeta med materialet ges eleverna möjlighet att utveckla förmåga 1. Genom de öppna utforskande uppgifterna måste eleverna själva formulera problem som de vill undersöka eller lösa. Eftersom att det inte finns något givet sätt att lösa dessa problem på kan eleverna dem emellan diskutera och analysera olika sätt att uppnå samma resultat. De får alltså möjlighet att utveckla förmåga 3. De har en utgångspunkt, de får själva formulera var de vill nå och därefter finna vägen dit. Här får de också i diskussioner sinsemellan följa och bedöma matematiskt resonemang, de får också föra sitt eget matematiska resonemang för att lösa problemställningen. Under sådana diskussioner kan de välja hur de kommunicerar sina tankar, om det

Ambitionsnivå	**Antal**
G	1
G-VG	3
VG	1
VG-MVG	2
MVG	5

Tabell 4.1: Angiven ambitionsnivå hos eleverna.

är till exempel muntlig diskussion eller en skriftlig inlämning. De ges då möjlighet att även uppfylla förmågorna 5 respektive 6.

Därutöver ger kompendiet också delvis möjlighet till att utveckla förmåga 4. Det finns dock inget i kompendiet som ”tvingar” fram denna utveckling. De har dock möjligheten, vilket är det enda som ämnesplanen kräver, och i vissa avsnitt även inspirationen, exempelvis att representera ett kortspel som en eller flera relationer definierade på en mängd. De får även förmåga att relatera matematiken i ett historiskt sammanhang då kompendiet även innehåller ett historiskt perspektiv, kapitlen i kompendiet inleds med begreppets eller avsnittets historiska utveckling. Mycket av den matematik som tas upp i gymnasiekurserna i matematik har sitt ursprung i början av 1900-talet och tidigare, det gör att det i princip alltid finns en historisk återkoppling till innehållet. Det som kompendiet utelämnar är sammanfattningsvis kopplingarna till yrken och samhället. Tanken med detta är att detta bör anpassas efter vilket program eleverna går. Därav tar kompendiet inte heller upp undervisningens anpassning till programmålen. Kompendiet är anpassat efter det innehåll som finns givet i ämnesplanens centrala innehåll för Matematik 1c, undervisningen måste utöver detta även ta hänsyn till programmål för det program där kursen kommer att ges.

4.2 Elevernas upplevelse av undervisningen

Undervisningsgruppen bestod av 15 elever från det naturvetenskapliga programmet. Enkäten som eleverna svarade på finns som bilaga i avsnitt A.3. Den visar att gruppsammansättningen var heterogen med en elev som läste Matematik A, två elever som läste Matematik B, tre elever som läste Matematik C, 8 elever som läste Matematik D och en elev som läste Matematik E. Strax över hälften av eleverna läste alltså D-kursen. Svaren på frågan om ambitionsnivå kunde utifrån svaren grupperas in i kategorierna G, G-VG, VG, VG-MVG, MVG. Ambitionsnivån var också heterogen med två toppar, den ena toppen var G-VG och den andra MVG. Se Tabell 4.1. Betygsnivån, som kunde delas in i samma gruppering, var dock något förskjuten nedåt. Topparna var här G och VG-MVG. Se Tabell 4.2 på nästa sida.

På alternativfrågorna, frågorna 4 till och med 7, är det jämn spridning över svaren. När det kommer till hur väl eleverna tagit till sig innehållet säger majoriteten

Betygsnivå	Antal
G	5
G-VG	1
VG	2
VG-MVG	4
MVG	3

Tabell 4.2: Angiven betygsnivå hos eleverna.

att innehållet är svårt att förstå men att de ändå förstår helheten. Det fanns ett fåtal elever, cirka en tredjedel, som sade sig ha förstått helheten men även vissa detaljer. Två elever hade lämnat kommentarer, dessa handlade om att det tar tid att lära sig för att innehållet är nytt och att det var ont om tid för denna undervisning. Det var också en elev som lämnat en kommentar angående detta under övriga kommentarer. Denna elev tyckte att det vore bättre att fokusera på den kurs de håller på att läsa nu eftersom att de hade ont om tid och behövde hålla ett högt tempo. Deltagandet i undersökningen hade därför prioriterats ned. De flesta läste dock ändå kompendiet. Majoriteten hamnade mellan att de läste men inte hela och att de läste enbart de delar som behandlades i undervisningen. Två hade fyllt i att de läste hela kompendiet men samtidigt att de inte läst hela. Detta tolkar jag som att de läst en stor del av kompendiet.

Två tredjedelar av eleverna tyckte att de aldrig hade sett liknande matematik tidigare medan en tredjedel tyckte att de inte sett denna typ av matematik men att det ändå påminde om vad de arbetat med tidigare. Det var också jämn spridning över hur de uppfattade uppgifterna. Fem svar på att det var svårt att förstå vad som skulle göras, fyra svar på att de förstod vad men inte hur och slutligen sex svar på att de förstod och att de även hade några idéer om hur. Att vissa elever inte förstod vad som skulle göras kan ha att göra med tidspressen, som påpekades ovan. En elev kommenterade också om uppgifterna att det kanske varit lättare att förstå om de jämförts med bokens ”vanliga” uppgifter som de var vana vid. På frågan om vad de tyckte om att ha kompendiets uppgifter i jämförelse med ”vanliga räkneuppgifter” var det jämnt. Hälften tyckte att uppgifterna i kompendiet var bättre och mer givande för förståelsen bland annat. Den andra hälften föredrog vanliga räkneuppgifter. Det fanns även en elev som påpekade att de vanliga uppgifterna var roligare men att kompendiets uppgifter var bättre för förståelsen.

Frågorna 8 till och med 10 var textfrågor. För att sammanfatta svaren har varje svar klassificerats som positivt, neutralt eller negativt. Ett svar som *Bra* klassificeras som positivt, ett som *Ok* eller *Lagomt* klassificeras som neutralt medan *Helt ok, lite mycket* och *För komplicerat* klassificeras båda som negativa. När det kommer till kompendiets textmängd var det övervägande positiva svar, cirka två tredjedelar. De flesta var alltså nöjda med mängden text i kompendiet trots att det var mer text än i en konventionell lärobok i matematik för gymnasieskolan.

De lösta exemplen i kompendiet fick också övervägande positiv respons. Några få tyckte att de var komplicerade och svåra att förstå. De flesta tyckte i motsats att de var bra och enkla att förstå. Detsamma gällde även uppgifterna. Intressant gällande uppgifterna var att ett svar påpekade att det behövdes fler uppgifter "så att man kan allt utantill och får förståelsen" (enkät, den 9 maj 2011).

När det kom till estetiken var det övervägande positivt, de negativa svaren påpekade att texten var för kompakt och liten samt att det var för få bilder. Det bör påpekas att kompendiet är avsett för att tryckas i A4-format medan eleverna fick ut det som ett häfte i A5-format. Det kan förklara att vissa elever tyckte att det var för liten text och att det var kompakt.

Eleverna upplevde att undervisning som genomfördes under studien skilde sig från deras vardagliga undervisning i att den innehöll mer genomgångar samt mer diskussion och förståelse. De upplevde att det var mer fokus på *varför* det är på ett eller annat sätt snarare än *att* det är så. Exempelvis gav de följande kommentarer: "Mer lyssna och förstå istället för repetition", "mer förståelse och lyssna ist. [sic] för alla satans repititioner [sic]" och "mer teoretiskt, härledningarna snarare än formlerna" (enkät, den 9 maj 2011). Det fanns även kommentarer som denna: "varit helt annorlunda $\rightarrow$ inte känt att det varit till ngn [sic] nytta" (enkät, den 9 maj 2011). Några få påpekade också att det var svårare. Majoriteten, cirka två tredjedelar, var dock positiva till att diskutera matematik i helklass istället för att räkna individuellt. De mer genomgående motiveringarna var att det var bra att höra andras tankar och att "man lär sig ännu bättre" (enkät, den 9 maj 2011). Många av eleverna ville dock ha en kombination av de båda sätten i undervisningen.

Avslutningsvis, fråga 13, handlade om hur elevens bild av matematik hade förändrats. De gavs tio påståenden som de fick kryssa för om de stämde. Resultatet sammanfattas i Tabell 4.3 på nästa sida. Tydligt från resultatet är att elevernas bild av matematiken har förändrats. De har fått en bild av matematiken som både bredare och djupare än de tidigare upplevt den samt att siffror bara är en liten del av matematiken. Det är dock få som upplever att de har fått en bättre förståelse för hur matematiken fungerar.

4.3 Egna observationer

Under tiden som jag undervisade eleverna gjorde jag några observationer. Vid introduktionen av mängder under den andra lektionen var de ovana den matematiska striktheten i att endast använda det som vi har definierat. Efter att ha definierat vad en mängd är och när vi infört definitionen av likhet för mängder ställde jag frågan om mängden $\{1, 2, 3\}$ är lika med $\{1, 1, 3, 3, 2, 3, 2, 1\}$. Definitionen av en mängd säger inget mer än att vi kan avgöra om ett element tillhör mängden eller ej. Detta leder till att definitionen av likhet för mängder säger att två mängder är lika om varje element som tillhör den ena mängden även tillhör den andra samt att varje element i den andra mängden även tillhör den första. Vi kan helt enkelt bara kontrollera om ett element tillhör en mängd eller ej. Detta leder till att mängderna i frågan är lika trots att de till synes är olika. Med den definition som råder kan

Påstående	Andel (procent)
Jag upplever nu matematiken som bredare än tidigare.	60
Jag upplever nu matematiken som djupare än tidigare.	60
Jag har fått en annan syn på matematikens uppbyggnad.	60
Jag upplever nu att matematiken snarare är grundad på axiom än på verkligheten.	27
Jag har nu bättre förståelse för hur matematiken fungerar.	20
Jag upplever nu att matematiken ”räknar” med mer än bara siffror.	47
Jag upplever nu att siffror bara är en liten del av matematiken.	47
Jag upplever nu att matematiken inte är klar utan i ständig utveckling.	47
Jag har nu en bättre bild av vad en matematiker verkligen sysslar med.	27
Jag är nu inte längre säker på om det är matematik som vi lär oss i skolan ...	27

Tabell 4.3: Sammanställning av fråga 13.

vi ej skilja mellan de olika ettorna och treorna som finns i en mängd. Efter detta avsprång från den intuitiva uppfattningen om likhet och vad vi faktiskt definierat anpassade de sig snabbt till att utgå från definitionerna i sina resonemang.

De fick under undersökningen genomföra en inlämningsuppgift och en presentation av satser på tavlan, samma satser de tidigare skulle bevisa i inlämningsuppgiften. Från de få inlämningsuppgifter som lämnades in kan dras slutsatsen att eleverna inte är så noggranna som skulle kunna önskas när det kommer till att motivera utifrån definitioner och andra satser. Inlämningarna skulle enkelt kunna beskrivas som listor av matematiska symboler, exempelvis

$$a + 1 = a + S(0) = S(a + 0) = S(a),$$

utan hänvisning till vilka definitioner eller tidigare resultat som används. Även om de är matematiskt korrekta saknar de redovisningen av tankarna. Det bör påpekas att detta skedde utan föregående övning i konstruktion av bevis. När de senare fick i uppgift att läsa om dessa satser och sedan redovisa dessa på tavlan för varandra kom tankarna till uttryck. Det som skrevs på tavlan var liknande det som lämnats in, men tankarna där resonemanget om vilka delar av definitionerna och satserna som användes presenterades då muntligen.

När jag skulle välja elever till intervju tillfrågade jag varje grupp om någon av dem skulle ha tid för en intervju. När jag frågade Jens och Mattias uppstod en konversation likt denna:

Mattias ”Ta det du, du är bättre på matte.”

Jens ”Men du är bättre på det här.” (den 9 maj 2011)

Detta ansåg jag vara intressant och därför valde jag att ta ut båda till intervju.

4.4 Intervjuer

Varje intervju inleddes med frågan ”Vad är era tankar om det här, om det vi gjort?” Eleverna har alla en positiv inställning i grunden, men de kommenterar alla tidsbristen. Oscar sade att ”Det är svårt när man har andra mattekurser som ska uppfyllas. . . . Det hade ju varit perfekt om du hade fått lektionstid avsatt hela terminen” (intervju Oscar, den 13 maj 2011). Han är ändå positiv till undervisningen. ”Om man hade haft det här som bas i Matte A, då hade det funkat jättebra, tror jag” (intervju Oscar, den 13 maj 2011). I intervjun med Jens, Sara och Mattias uppstår följande konversation som svar på frågan:

Jens ”Jag tycker att det har varit ganska intressant, grejen är väl snarare, alltså tidpunkten, det hade varit bättre om det varit två veckor senare eller några månader tidigare eftersom att detta var i princip tidpunkten då vi har som mest stressigt, om man säger så.”

Sara ”Alltså, det är helt annat mot för att räkna.”

Jens (Han skrattar och säger) ”Jag tror aldrig vi har sett någon göra 2+2 så komplicerat.” (intervju Sara, Jens och Mattias, den 13 maj 2011)

Carolina påpekade under sin intervju att denna klass ej var målinriktad och att det är ”ju egentligen ingen som tycker om matte” (intervju Carolina, den 11 maj 2011). Utifrån detta perspektiv anser jag att resultaten är positiva, de flesta av eleverna hade ändå en positiv upplevelse av undervisningen trots att de tyckte att det var ont om tid och speciellt om de inte var riktigt intresserade av matematik. Det fanns på enkäten en del negativa kommentarer om elevernas bild av ämnet, någon elev hade skrivit att ämnet är ett ”nödvändigt ont” (enkät, den 9 maj 2011). Carolina berättade också att hon hade pratat med andra om det här, och att hon hade hört dem säga ”Oj, var det här matte, är det det här vi kan använda den till?” och att ”det kändes mer som universitet, mer teorier och faktiskt utforska matten istället för att bara göra den” (intervju Carolina, den 11 maj 2011). Carolina trodde att denna undervisning nog kunde verka positivt på en klass med matematiskt omotiverade elever och syftade till sina egna erfarenheter med sin klass under studiens gång.

Carolina beskriver också hur hon känner jämfört med hennes erfarenheter av den ordinarie matematikundervisningen. Hon påpekar då att ibland när en elev ställer en fråga till läraren, till exempel om varför det är på något visst sätt, får den svaret att ”’Den fråga du har nu hör ej till den här kursen, lär dig denna regeln’ – jättefrustrerande, ger noll förståelse” (intervju Carolina, den 11 maj 2011). Hon fortsätter med att säga att ”Den här typen av matematik är inte bara jobba utifrån reglerna utan ta reda på var de kommer ifrån, det tycker jag är jättebra!” (intervju Carolina, den 11 maj 2011)

När vi pratade om den typen av uppgifter som finns i kompendiet säger Oscar ”Ja, jag tror faktiskt att det skulle funka ganska bra, fast då ska man ju börja på ett tidigt steg så att man kommer in i själva stilen” (intervju Oscar, den 13 maj 2011). Han påpekar att denna typ av undervisning behöver börja tidigt och att det måste förklaras mer hur bevis går till. Under studien fick de en kort sammanfattning av logiken bakom bevisen. Kompendiets hela logikavsnitt tog cirka 40 minuter att gå igenom, vilket egentligen kan vara för kort tid. Jag ansåg dock att det behövdes göras så för att hinna djupare in i det övriga materialet. I samtalet med Sara, Jens och Mattias utspelas följande konversation:

Sara ”Alltså, det är ju lite krångligt, man måste ju fatta det först liksom. Det tar ju ett tag innan man kommer på hur det fungerar, men när man väl kommit på det förstår man lättare.”

Jens ”Det är ju inte helt lätt att sätta egna ord på det heller.”

Sara ”Det tänkte jag också på, man kan förstå men det är svårt att förklara det för andra.”

Jens ”Det är så mycket att hålla i huvudet.”

Sara ”Men om man ska skriva ett tal sådär, då måste man ju kolla på jättemånga [definitioner etcetera] . . . det är ju många steg för en uppgift.” (intervju Sara, Jens och Mattias, den 13 maj 2011)

Jag tog då upp att det är färre uppgifter i kompendiet jämfört med den vanliga räkneboken och frågade om vad det trodde om det, om det kunde var fördelaktigt eller negativt. De spekulerade om detta och de stora dragen var att det nog kunde gå jämnt upp, att istället för att repetera in kunskapen kunde det ge mer förståelse att jobba med dessa större – och som de påpekat vid andra tillfällen, djupare – uppgifter. Mattias påpekar också att ”mitt huvud klarar inte av småuppgifter” (intervju Sara, Jens och Mattias, den 13 maj 2011). Småuppgifter är vad de kallade bokens uppgifter. Mattias läser fortfarande B-kursen medan de andra två båda läser D-kursen. Sara har haft MVG i alla kurser hittills, Jens har haft VG och Mattias ligger på G-nivå. När jag frågade om vilken nivå de var på började Mattias med att peka på B:et på framsidan av sin bok och han säger ”jag är kvar på B-kursen, jag är dålig i matte” (intervju Sara, Jens och Mattias, den 13 maj 2011). Jag frågade dem då hur det var att läsa texten i kompendiet och hur det var i jämförelse med den vanliga boken. Mattias svarade ”Jag läste bara igenom det under själva [lektionen], jag vet inte om jag har lätt för den här matten men den kändes lättare. Jag vet inte varför” (intervju Sara, Jens och Mattias, den 13 maj 2011). Detta är ett intressant resultat, för det är inte det som kan förväntas från en elev som anser sig själv ha svårt för matematik och ligger på G-nivå två kurser efter de andra. Detta kan ha att göra med dels resultaten om implicita och explicita definitioner som Agahi (2010) tar upp och dels med resultatet om läsförståelse som Österholm (2006) tar upp. Det skulle också kunna bero på att eleverna upplevde kompendiet som mer sammanhängande än sin vanliga lärobok. Carolina påpekade under sin intervju att en ”vanlig mattebok” kan slås upp mitt i och börja läsas, medan hon menade att detta inte var möjligt med kompendiet. Sara tyckte att texten var utförlig om vad som skulle göras och vad som menades och Jens höll med och påpekade att han tyckte att det var lättare att följa de logiska resonemangen när de står i text. Sara fyllde i att hon inte kände att hon hinner uppfatta alla delar i den lärobok som de använde.

Carolina, som också haft MVG genom alla kurserna, tyckte när jag intervjuade henne att texten kändes abstrakt. ”Men det är ju det jag känner lite också, med våra böcker, matte är ju egentligen teorier från början ... Det är resonemang, men det finns inga resonemang i våra böcker, bara tal” (intervju Carolina, den 11 maj 2011). Jag upplever en viss frustration över boken från Carolina, hon påpekar att det finns ingenting om hur bevis går till i henns bok. De få genomgångar som finns läser inte ens alla elever, säger hon. Den bild hon målar upp, som jag uppfattar den, är att de vanliga böckerna innehåller mest uppgifter och några få gånger finns en genomgång. Om fler elever känner likadant kan fokus lätt hamna på uppgifterna eftersom att det är dessa som utgör huvuddelen av boken.

Avslutningsvis diskuterade vi undervisningens utformning. Jag frågade vad de tyckte om att diskutera matematik och presentera inför klassen. Följande utdrag ur samtalet får redogöra för elevernas tankar:

Sara ”Det är bra, tycker jag. Det är bra att höra hur alla andra tänker, för oftast så, alltså lärarna brukar ju veta mycket mer än en själv och då när man hör hur någon annan tänker då är det ju på samma nivå.”

Jens ”Har nog inget att tillägga där.”

Sara ”Sen blir det roligare också istället för att bara sitta och skriva av det som står på tavlan, man får mer engagemang.”

Jens ”Det är ju tråkigare att sitta och skriva i boken.” (intervju Sara, Jens och Mattias, den 13 maj 2011)

Jag presenterade också idén om en undervisning som består av diskussioner, presentationer och denna typ av uppgifter och att istället för att ha prov får eleverna gå hem och skriva sina egna lösningar och bevis för att sedan lämna in dem. Elevernas reaktioner får avsluta detta kapitel.

Jens ”Det skulle fan vara skönare.”

Sara ”Det låter ju precis tvärt emot vad matte brukar vara ... ” (intervju Sara, Jens och Mattias, den 13 maj 2011)

Sedan diskuterade de problematiken med provstress och den ytinlärning som sker när de pluggar inför prov. De kom överens om att detta sätt att arbeta skulle kunna vara bättre för förståelse och inlärningen generellt än den ytinlärning som sker vid provpluggande.

Kapitel 5

Diskussion

I detta kapitel avser jag att diskutera huruvida de frågeställningar jag utgått ifrån blivit besvarade. Frågeställningarna var

1. På vilka sätt tillåter, eller hindrar, gymnasieskolans nya ämnesplan i matematik att undervisa formell matematik?

   a) Hur mycket innehåll behövs uppskattningsvis för att undervisa Matematik 1c med formell matematik?

   b) Vilken typ av elevarbete, om något särskilt, kräver ämnesplanen?

2. På vilka sätt kan ett undervisningsmaterial för formell matematik motsvarande Matematik 1c se ut?

3. Hur är möjligheterna att undervisa formell matematik på gymnasienivå?

Den nya ämnesplanen tillåter det formella innehållet eftersom att den inte styr undervisningens utformande. Den tillåter även den extra matematik, som inte nämns i ämnesplanens centrala innehåll, men som krävs för detta, detta eftersom att ämnesplanens centrala innehåll bara är en lägsta garantinivå för vad som ska inkluderas. Det verkar också rymmas inom kursens tidsramar, även om detta är svårt att säga utan att se hela materialet.

Den punkt där kompendiet och ämnesplanen går isär är att ämnesplanen har kravet om att eleverna ska få utveckla ”förmåga att hantera procedurer och lösa uppgifter av standardkaraktär” (SKOLFS, 2010:261, sidan 87). Denna del togs inte med i utvecklingen av kompendiet eftersom att den förmågan varit det centrala i undervisningen de senaste årtiondena. Det borde alltså finnas gott om uppgifter av denna typ. Däremot borde läromedlet ändå se ut som det som utvecklats under studien eftersom eleverna upplevde det som bra och en av eleverna, som ansåg sig själv som dålig på matematik, upplevde kompendiet som lättare att läsa och förstå. Detta är dock bara en elev och en större studie bör genomföras. Det skulle kunna ha att göra med resultatet från Österholm (2006) om att den generella läsförmågan användes istället för den speciella ”matematikläsförmågan”. Men det kan också bero på typen av definitioner som används i gymnasieskolans böcker (se Agahi, 2010), och att dessa skiljer sig från typen av definitioner som återfinns i universitetslitteraturen och i kompendiet.

Utifrån resultatet har jag kommit fram till att det inte finns någon egentlig problematik för att undervisa formell matematik på gymnasienivå. Det kan vara nödvändigt då eleverna både vill ha det och behöver det. Det finns vissa matematiska områden där det idag finns bevisuppgifter, exempelvis geometri och formler för trigonometriska funktioner (Agahi, 2010, hänvisar till Hemmi, 2006). Detta kan bero på faktorer som att det första kända formella axiomsystemet var Euklides axiomatiska system för geometrin och att det har en matematikhistorisk anknytning. Ett annat alternativ är att det är enkelt att skapa metaforer för geometrin eftersom att den använder figurer som är vanliga i verkligheten. Ett intressant exempel är att den nya ämnesplanen för gymnasieskolan säger under just området geometri att kursen ska ge en ”[i]llustration av begreppen definition, sats och bevis, till exempel med Pythagoras sats och triangelns vinkelsumma” (SKOLFS, 2010:261, sidan 101). Detta kan tänkas bero på att bevis och resonemang kan verka enkla inom geometri eftersom att det handlar om geometriska figurer som är intuitiva och verkliga. Problem som kan uppstå genom detta är att eleverna ändå inte tillgodogör sig matematikens generaliserbarhet då bevisen och resonemangen däri byggs upp av verkligheten – inte matematiken. Metaforerna blir enkla inom geometrin eftersom att figurerna är från verkligheten, men som Kilhamn (2011) visar bygger eleverna upp matematiken på verkligheten och använder verkligheten för att resonera om matematiken och inte tvärt om, som är avsikten. Att eleverna får erfarenhet av denna generaliserbarhet var dessutom ett krav i ämnesplanen. Att introducera bevis och matematiskt resonemang genom något mer abstrakt verkar enligt resultatet i denna studie hjälpa eleverna att bryta sig loss från den felaktiga bilden att matematiken är byggd på verkligheten. ”Den kändes väldigt abstrakt”, sade Carolina, men verkade ändå förstå poängen och kunna ta till sig hur man använder bevis för den abstrakta matematiken. Enkäten visade också att de flesta eleverna var positiva till att få bevis för de mer abstrakta delarna av matematiken också, en elev skrev till och med ”kul att kunna bevisa” som kommentar på frågan om elevens bild av ämnet matematik. Detta resultat stämmer även överens med resultatet från Hemmi (2006), där studenterna uppgav att de ville lära sig att konstruera bevis.

En kritik mot studien är att den genomförts med gymnasieelever som redan läst en del matematik på gymnasiet, vilket gör att de haft ytterligare tid på sig att till exempel vänja sig vid algebra. Detta kan påverka resultatet något, men eleverna själva sade under intervjun att de trodde att det skulle fungera mycket bra att ha denna matematik i kursen Matematik A.

Detta skulle kanske kunna förändra svenska elevers negativa bild av matematiken som något ”nödvändigt ont” som de måste uppnå bra betyg i. Ett tydligt exempel är Saras reaktion på att undervisningen i matematik skulle kunna utformas på detta sätt: ”Det låter precis tvärt emot vad matte brukar vara ... ” I min värld är det precis vad matematik innebär.

5.1 Slutsats

Detta är en liten studie och det är svårt att dra några större slutsatser, men studien ger en föraning och en utgångspunkt till att vidare undersöka huruvida formell matematik kan undervisas i gymnasieskolan. Av resultatet att döma finns ingen egentlig problematik med att undervisa formell matematik på gymnasiet. Dessutom verkar eleverna vilja ha en mer formell matematik, de vill ha bevis och härledningar av de formler och regler de annars måste lära sig utantill. De flesta eleverna trivdes också med undervisningsformen, vilket gör att kompendiets utformning kan vara en bra utgångspunkt i utvecklingen av undervisningsmaterial för kursen Matematik 1c. Ämnesplanen har krav på att en viss typ av uppgifter som kompendiet inte tar upp ska ingå i undervisningen, men då tidigare forskning visar att det finns gott om denna typ av uppgifter i nuvarande läromedel finns ingen egentlig anledning att utveckla ytterligare sådana uppgifter.

5.2 Förslag till vidare forskning

Mitt förslag för vidare forskning är att genomföra en longitudinell studie. Denna skulle förslagsvis vara att genomföra undervisningen av en hel kurs i Matematik 1c och därefter utvärdera resultatet.

En av eleverna, en som ansåg sig själv som dålig på matematik, tyckte att den typen av matematik som användes i studien var lättare att läsa och förstå, detta bör studeras vidare i större omfång. Kanske skulle en sådan studie kunna ta plats på ett av program med få, helst inga, matematikmotiverade elever. Det vore också värdefullt att undersöka huruvida en liknande undervisning och ett liknande material kan användas för att förbättra resultaten i och elevernas intresse för matematik i svensk grundskola.

Referenser

Hoda Agahi. 2010. Matematiska definitioner i gymnasie- & universitetsläromedel. Examensarbete, Göteborgs universitet, Göteborg.

Emilia Aldrin. 2011. *Namnval som social handling [Elektronisk resurs] : val av förnamn och samtal om förnamn bland föräldrar i Göteborg 2007-2009*. Doktorsavhandling, Uppsala universitet, Uppsala. ISBN 978-91-506-2195-2.

Monica Dalen, Bo Kärnekull, och Ethel Kärnekull. 2008. *Intervju som metod*, 1 edition. Gleerups utbildning, Malmö. ISBN 978-91-40-65247-8.

Norman K. Denzin. 1978. *The research act : a theoretical introduction to sociological methods*, 2 edition. McGraw-Hill, New York. ISBN 0-07-016361-8.

Lil Engström. 2006. *Möjligheter till lärande i matematik : Lärares problemformuleringar och dynamisk programvara*. Doktorsavhandling, Stockholm University, Department of Curriculum Studies and Communication.

Kirsti Hemmi. 2006. *Approaching proof in a community of mathematical practice*. Doktorsavhandling, Stockholm University, Stockholm. ISBN 91-7155-307-X.

B. Henriksson och S. A. Månsson. 1996. Deltagande observation. In Per-Gunnar Svensson och Bengt Starrin, redaktörer, *Kvalitativa studier i teori och praktik*. Studentlitteratur, Lund. ISBN 91-44-39851-4.

Monica Johansson. 2006. *Teaching mathematics with textbooks : a classroom and curricular perspective*. Doktorsavhandling, Luleå University of Technology, Luleå. ISSN 1402-1544.

Cecilia Kilhamn. 2011. *Making Sense of Negative Numbers*. Doktorsavhandling, University of Gothenburg, Faculty of Education. ISBN 978-91-7346-698-1. URL `http://hdl.handle.net/2077/24151`.

James T. Kinard och Alex. Kozulin. 2008. *Rigorous mathematical thinking : conceptual formation in the mathematics classroom*. Cambridge University Press, Cambridge. ISBN 978-0-521-87685-8 (hardback).

Morris Kline. 1990a. *Mathematical thought from ancient to modern times. Vol. 1*. Oxford Univ. Press, New York. ISBN 0-19-506135-7.

Morris Kline. 1990b. *Mathematical thought from ancient to modern times. Vol. 2.* Oxford Univ. Press, New York. ISBN 0-19-506136-5.

Morris Kline. 1990c. *Mathematical thought from ancient to modern times. Vol. 3.* Oxford Univ. Press, New York. ISBN 0-19-506137-3.

Birgitta Kullberg. 2004. *Etnografi i klassrummet*, 2 edition. Studentlitteratur, Lund. ISBN 91-44-03090-8.

Stephen Marsland. 2009. *Machine learning : an algorithmic perspective.* Chapman & Hall/CRC, Boca Raton, FL. ISBN 978-1-4200-6718-7.

Magnus Österholm. 2006. *Kognitiva och metakognitiva perspektiv på läsförståelse inom matematik.* Doktorsavhandling, Linköpings universitet, Linköping. ISBN 91-85643-45-9. Diss. Linköping : Linköpings universitet, 2006.

Staffan Selander och Dagrun Skjelbred. 2004. *Pedagogiske tekster for kommunikasjon og læring.* Universitetsforlaget, Oslo. ISBN 82-15-00411-3 :.

SFS. 2010:2039. Gymnasieförordningen. URL `http://www.riksdagen.se/webbnav/index.aspx?nid=3911&bet=2010:2039`.

SKOLFS. 2000:5. Skolverkets föreskrifter om kursplaner och betygskriterier fiör kurser i ämnet matematik i gymnasieskolan och inom gymnasial vuxenutbildning. URL `http://www.skolverket.se/skolfs?id=637`.

SKOLFS. 2010:261. Förordning om ämnesplaner för de gymnasiegemensamma ämnena. URL `http://www.skolverket.se/skolfs?id=2088`.

Skolinspektionen. 2010. Undervisningen i matematik i gymnasieskolan. Stockholm. Kvalitetsgranskning, rapport 2010:13.

Skolverket. 2003. Lusten att lära [elektronisk resurs] : med fokus på matematik : nationella kvalitetsgranskningar 2001-2002. Stockholm.

Skolverket. 2009. Timss advanced 2008 : svenska gymnasieelevers kunskaper i avancerad matematik och fysik i ett internationellt perspektiv. Stockholm.

Skolverket. 2011. GY2011. URL `http://www.skolverket.se/sb/d/2885`. Hämtad den 1 maj 2011.

SOU. 2004:97. Att lyfta matematiken – intresse, lärande, kompetens.

Hans Thunberg och Lars Filipsson. 2005. Gymnasieskolans mål och Högskolans förväntningar : En jämförande studie om matematikundervisningen. URL `http://www.math.kth.se/gmhf/`.

Hans Thunberg, Lars Filipsson, och Mikael Cronhjort. 2006. Gymnasiets mål och högskolans förväntningar. *Nämnaren*, (2):10–15.

Vetenskapsrådet. 2002. Forskningsetiska principer inom humanistisk-samhällsvetenskaplig forskning. Stockholm. ISBN 91-7307-008-4.

Lev S. Vygotsky. 1978. *Mind in Society*. Harvard University Press, England, Cambridge, Massachusetts, London.

H. Walcott. 1988. Ethnographic research in education. In J. M. Jaeger, redaktör, *Complementary Methods for Research in Education*. Washington.

Bilaga A

Dokument

I detta appendix beskrivs och bifogas de dokument som använts i undersökningen. Från de brev och dokument som skickats till olika skolors rektorer till de dokument som eleverna tagit del av under undersökningen.

A.1 E-brev till rektorer

Följande e-brev skickades till rektorer för olika skolor för att fråga om skolan skulle vara intresserad av att deltaga i undersökningen.

```
Hej <rektor>,

Jag heter Daniel Bosk, jag gör denna vår mitt examensarbete på
Civilingejör- och lärarprogrammet (CL) vid Kungliga Tekniska Högskolan
(KTH) och Stockholms universitet (SU). Mitt examensarbete handlar
om att formalisera gymnasiematematiken och undersöka hur denna kan
undervisas för gymnasieelever.  Jag undrar därför om jag kan få
komma till <skolans namn> och genomföra en undersökning med några av
era elever?

En detaljerad beskrivning av projektet finns bifogad som
projektbeskrivning.pdf.

Syftet med projektet är att ta fram en inledning till Matematik 1c.
Som en del av projektet ska materialet testas med elever, och då helst
även med elever i målgrupperna för Matematik 1a och 1b. Det senare
för att undersöka om även dessa kurser skulle kunna formaliseras på
sikt. För undersökningen behöver jag träffa minst en klass vid tre
till fyra tillfällen om en timme vardera, men jag är tacksam för de
elever och den tid jag kan få.
```

```
Självklart kommer projektet att följa Vetenskapsrådets etiska
riktlinjer.

Veckorna 12-15 (21/3-12/4) är avsatta för undersökningen. Rapporten
för projektet ska vara klar och ska presenteras på KTH i maj. Om
intresse finns delar jag gärna med mig av denna.

Om det finns intresse håller jag gärna också öppna ''föreläsningar''
för alla elever att delta vid i t.ex. aulan eller annan lämplig
lokal med en whiteboard (eller krittavla), lite som en ''minikurs''
i rigorös matematik.

Skulle ni vara intresserade av att delta i denna undersökning?


Vänligen, Daniel Bosk
```

Det bifogade dokumentet *projektbeskrivning.pdf* är inkluderat på nästa sida.

Projektbeskrivning
En formalisering av matematiken i svensk gymnasieundervisning

Daniel Bosk*

20 mars 2011

Dagens matematikundervisning har fått mycket kritik på sistone, bl.a. från Skolinspektionen (2010). Den upplevs som räknecentrerad och eleverna lär sig genom memorering snarare än förståelse, denna negativa utveckling behöver vändas (Skolinspektionen, 2010).

Projektets huvudsyfte är att lägga grunden för en formalisering av gymnasiematematiken, att ta fram (en början till) undervisningsmaterial motsvarande (och därav bara en del av) ämnesplanen för Matematik 1c. Fokus kommer att ligga på att ta fram en inledning till rigorös matematik, en grund att bygga fortsatt undervisning på. Syftet är således inte att ta fram ett fördjupningsmaterial, utan att undersöka om och hur dagens gymnasiematematik kan formaliseras. Stöd för projektet finns i den nya ämnesplanen Matematik 1c, som föreskriver högre krav på rigoröst matematiskt innehåll.

Det innehåll i Matematik 1c som kommer att tas upp i materialet är

- Matematisk argumentation med hjälp av grundläggande logik inklusive implikation och ekvivalens [...],
- Illustration av begreppen definition, sats och bevis, [...]

och detta kommer att tillämpas på

- Egenskaper hos mängden av heltal, olika talbaser samt begreppen primtal och delbarhet,
- Generalisering av aritmetikens räknelagar till att hantera algebraiska uttryck,

från avsnittet *Taluppfattning, aritmetik och algebra* i ämnesplanen. Andra delar som kommer att beröras är

- Strategier för matematisk problemlösning [...],
- Matematiska problem med anknytning till matematikens kulturhistoria.

Som en del av projektet ska materialet testas med elever, och då helst även med elever i målgrupperna för Matematik 1a och 1b. Det senare för att undersöka om även dessa kurser skulle kunna formaliseras på sikt.

*Kontakt: dbosk@kth.se

Tisplanen är att under veckorna 3-11 (17/1-18/3) utveckla ett material för detta. Veckorna 12-15 (21/3-12/4) är avsatta för testning.

Projektet ska redovisas med en rapport och presentation på Kungliga Tekniska Högskolan i maj.

Referenser

Skolinspektionen. 2010. Undervisningen i matematik i gymnasieskolan. Stockholm. Kvalitetsgranskning, rapport 2010:13.

A.2 Elevers deltagande

Vetenskapsrådets forskningsetiska principer (Vetenskapsrådet, 2002) säger att deltagarna i ett forskningsprojekt bör få ta del av information om projektet, att alla data behandlas konfidentiellt och så vidare. De säger också att deltagarna ska ha rätt till att när som helst avbryta sitt deltagande. När det gäller deltagare som ej är myndiga bör målsman godkänna deltagandet i projektet.

Eleverna som deltog i detta projekt fick ta del av följande dokument innan undersökningen. Ett dokument om godkännande av deltagande, ett om Vetenskapsrådets forskningsetiska principer, projektbeskrivningen från avsnitt A.1.

Godkännande av deltagande i projektet *En formalisering av matematiken i svensk gymnasieundervisning*

Daniel Bosk*

20 mars 2011

Bilagor till detta dokument är: Projektbeskrivning En formalisering av matematiken i svensk gymnasieundervisning *och* Forskningsetiska principer.

Projektets undersökande del avser att testa under projektet framtagit material med skolelever. Detta kommer att göras genom undervisning och examination på så sätt materialet är avsett att användas. Examinationen sker genom diskussioner och inlämningsuppgifter. Undersökningen avslutas med en enkät och eventuell intervju om elevens upplevelser av denna undervisning, uppgifternas och examinationens utformande och materialets upplägg och utformande.

Alla uppgifter om enskild elev kommer att i enlighet med *Forskningsetiska principer* att avidentifieras och elevernas deltagande kommer således att vara helt anonymt. Det kommer i den resulterande rapporten ej att vara möjligt att identifiera en enskild elev.

*Kontakt: dbosk@kth.se

Godkännande

Med detta godkännande avser undertecknad att Daniel Bosk har tillstånd att i enlighet med dokumentet Forskningsetiska principer *och texten ovan observera angiven elev under undervisning och använda elevens inlämnade uppgifter, enkäter och intervjumaterial i projektet* En formalisering av matematiken i svensk gymnasieundervisning.

____
Datum

____
Elevens namn

____
Målsmans namn

____
Målsmans underskrift

Vetenskapsrådets forskningsetiska principer

Daniel Bosk*

20 mars 2011

Följande text består av relevanta passager hämtade från Vetenskapsrådets Forskningsetiska principer: inom humanistisk-samhällsvetenskaplig forskning *(Vetenskapsrådet, 2002).*

Forskning är viktigt och nödvändigt för både individernas och samhällets utveckling. Samhället och samhällets medlemmar har därför ett berättigat krav på att forskning bedrivs, att den inriktas på väsentliga frågor och att den håller hög kvalitet. Detta krav, som här kallas *forskningskravet*, innebär att tillgängliga kunskaper utvecklas och fördjupas och metoder förbättras. Samhällets medlemmar har emellertid samtidigt ett berättigat krav på skydd mot otillbörlig insyn t.ex. i sina livsförhållanden. Individer får inte heller utsättas för psykisk eller fysisk skada, förödmjukelse eller kränkning. Detta krav, som här kallas *individskyddskravet*, är den självklara utgångspunkten för forskningsetiska överväganden.

Varken forskningskravet eller individskyddskravet är emellertid absoluta utan måste alltid vägas mot varandra. Inför varje vetenskaplig undersökning skall ansvarig forskare göra en vägning av värdet av det förväntade kunskapstillskottet mot möjliga risker i form av negativa konsekvenser för berörda undersökningsdeltagare/uppgiftslämnare och eventuellt för tredje person. Såväl kortsiktiga som långsiktiga följder skall därvid beaktas.

Det grundläggande individskyddskravet kan konkretiseras i fyra allmänna huvudkrav på forskningen.

Informationskravet Forskaren skall informera de av forskningen berörda om den aktuella forskningsuppgiftens syfte.

Samtyckeskravet Deltagare i en undersökning har rätt att själva bestämma över sin medverkan.

Konfidentialitetskravet Uppgifter om alla i en undersökning ingående personer skall ges största möjliga konfidentialitet och personuppgifterna skall förvaras på ett sådant sätt att obehöriga inte kan ta del av dem.

*Kontakt: `dbosk@kth.se`

Nyttjandekravet Uppgifter insamlade om enskilda personer får endast användas för forskningsändamål.

Vart och ett av dessa krav kan sedan specificeras ytterligare i ett antal regler, av vilka några skall redovisas i det följande.

Referenser

Vetenskapsrådet. 2002. Forskningsetiska principer inom humanistisk-samhällsvetenskaplig forskning. Stockholm. ISBN 91-7307-008-4.

A.3 Enkät

Som avslutning av undersökningen fick alla deltagare fylla i följande enkät.

Enkät för
En formalisering av matematiken i svensk gymnasieundervisning

Daniel Bosk*

8 maj 2011

1. Hur mycket matematik har du läst tidigare?

2. Vilken ambitionsnivå brukar du ha i ämnet matematik?

3. Vilken betygsnivå brukar du ligga på i matematik?

På följande frågor, markera de alternativ som passar dig bäst.

4. Hur väl har du tagit till dig ämnesinnehållet?
   - A. Inte alls.
   - B. Lite, men det är ändå svårt att förstå.
   - C. Jag känner att jag förstår helheten.
   - D. Jag känner att jag förstår helheten och vissa detaljer.
   - E. Fullständigt.

   Eventuell kommentar.

5. Kändes innehållet främmande och ovant att arbeta med?
   - A. Ja, jag har aldrig sett sådan matematik tidigare.
   - B. Jag har inte sett sådan matematik tidigare, men det det påminde lite om det vi brukar göra.
   - C. Nej, jag är van sedan tidigare.

   Eventuell kommentar.

6. Kändes innehållet svårt att förstå och arbeta med?

*Kontakt: `dbosk@kth.se`

A. Ja, det var svårt att förstå vad som skulle göras.
B. Ja, jag förstod vad som skulle göras, men inte hur.
C. Jag förstod vad som skulle göras och jag hade några idéer om hur.
D. Nej, det var enkelt.

7. Läste du i kompendiet?
   A. Ja, jag läste hela.
   B. Ja, men jag läste inte hela.
   C. Ja, jag läste de delar vi arbetade med.
   D. Nej, men jag bläddrade i det.
   E. Nej, jag läste det inte alls.

   Eventuell kommentar.

På följande frågor, svara så utförligt som du kan.

8. Vad tycker du om kompendiets upplägg med avseende på
   (a) textmängd?
   (b) exempel?
   (c) övningsuppgifter?
   (d) innehållet generellt?
   (e) estetik?

Övriga kommentarer.

9. Vad tycker du om att ha kompendiets övningar istället för ”vanliga räkneuppgifter”?

10. Vad tycker du om att diskutera matematik i helklass och i grupp istället för individuell räkning?

11. Beskriv hur denna matematikundervisning skilt sig från din vardagliga matematikundervisning.

12. Hur skulle du beskriva din bild av ämnet matematik?

Markera alla alternativ som passar dig.

13. Om din bild av äment har förändrats sedan tidigare, hur har den förändrats? Markera alla påståenden som stämmer för dig.
    - A. Jag upplever nu matematiken som bredare än tidigare.
    - B. Jag upplever nu matematiken som djupare än tidigare.
    - C. Jag har fått en annan syn på matematikens uppbyggnad.
    - D. Jag upplever nu att matematiken snarare är grundad på axiom än på verkligheten.
    - E. Jag har nu bättre förståelse för hur matematiken fungerar.
    - F. Jag upplever nu att matematiken ”räknar” med mer än bara siffror.
    - G. Jag upplever nu att siffror bara är en liten del av matematiken.

H. Jag upplever nu att matematiken inte är klar utan i ständig utveckling.

I. Jag har nu en bättre bild av vad en matematiker verkligen sysslar med.

J. Jag är nu inte längre säker på om det är matematik som vi lär oss i skolan ...

Om du har några tillägg som inte fanns med, skriv dem nedan.

14. Övriga kommentarer.

Bilaga B

Kompendium

I denna bilaga följer det material som utvecklats för studien. Det är ett kompendium för formell matematik motsvarande en inledning till gymnasiets kurs Matematik 1c (SKOLFS, 2010:261).

Kompendiet finns bifogat som ett självständigt dokument.